ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. М. БЕСКИН

ЗАДАЧНИК — ПРАКТИКУМ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

УЧПЕДГИЗ · 1962

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Н. М. БЕСКИН

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ ЗАОЧНЫХ ОТДЕЛЕНИЙ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДИНСТИТУТОВ

Издание второе, переработанное

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

СОДЕРЖАНИЕ

Николай Михайлович Бескин

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Редактор *В. Г. Долгополов*
Художественный редактор *А. В. Максаев*
Технический редактор *Н. Ф. Макарова*
Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 10/II 1962 г. Подписано к печати 24/VII 1962 г. $84 \times 108^1/_{32}$ Печ. л. 11,5 (9,43). Уч.-изд. л. 8,85 Тираж 30 тыс. экз. А05200

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Полиграфкомбинат. Саратовского совнархоза, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Заказ № 33.

Цена 27 коп.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачник-практикум — это книга, которая учит читателя решать задачи, показывая, как они решаются.

Этот задачник-практикум предназначен для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Он отличается от школьных задачников и по содержанию и по расположению материала.

Отличие по содержанию заключается, во-первых, в том, что здесь главное внимание уделено аналитической стороне тригонометрии (тригонометрические функции числового, в частности комплексного, аргумента, нахождение пределов, экстремумы, суммирование рядов, приближенные методы решения уравнений). Во-вторых, удалены наиболее простые и традиционные задачи, рассматриваемые в школьном курсе. Количество задач на решение треугольников (на плоскости) сведено к минимуму. Однако это не значит, что задачник комплектовался из трудных и искусственных задач. Это — задачник повышенной тематики, а не повышенной трудности.

Включен параграф, посвященный решению сферических треугольников.

Отличие по расположению материала заключается в том, что задачи не расположены по разделам школьного курса тригонометрии. В школьных задачниках, например, сначала идут тождества и уравнения, основанные на формулах сложения, а уже затем — на формулах двойного и половинного аргумента. Здесь же сначала идут все тождества, а затем—все уравнения. Предполагается, что, приступая к решению задачи № 1, учащийся уже владеет в полном объеме школьным курсом тригонометрии.

Автор не имел в виду дублировать задачник по анализу. Задачи на раскрытие неопределенностей должны решаться без использования правила Л'Опиталя, а задачи на экстремумы — без дифференцирования. В предлагаемой книге эти задачи приводятся, чтобы показать возможные применения тригонометрических преобразований.

Задачи, основанные на формулах Моавра и Эйлера, иногда параллельно решаются (более сложно) элементарными методами. Это создает возможность использования таких задач в школе и поэтому представляет интерес для будущего учителя

В задачах на приближенное решение уравнений (§ 11) предполагается только метод проб.

Вычислительные задачи не рассчитаны на какие-либо определенные таблицы. Углы задаются и вычисляются в минутах (т. е с погрешностью меньшей, чем 30″), а значения тригонометрических функций — с четырьмя цифрами после запятой. Учащийся обязательно должен располагать таблицей тригонометрических функций числового аргумента.

Задачник разделен на два раздела: основной и дополнительный Основной раздел содержит минимальный набор задач, которые рекомендуется перерешать полностью. Дополнительный раздел (повторяющий ту же тематику и состоящий из таких же параграфов) дает выбор задач для дополнительной тренировки.

Большинство задач этого задачника заимствовано из русской дореволюционной и иностранной литературы. Не перечисляя всех источников, укажем один, который был использован особенно значительно: С. Войтинский, Собрание вопросов и задач прямолинейной тригонометрии, Спб, вып. 1, 1909, вып. 2, 1909, вып. 3, 1911.

Во втором издании уменьшен основной раздел, добавлен список формул, исключены некоторые задачи (слишком легкие и слишком громоздкие) и, самое главное, исправлены замеченные ошибки и опечатки.

Автор искренне благодарен за критические указания И. И. Беловой и А. М. Люстиг (Елабуга), Е. А. Мурзаеву (Саратов), М. Б. Балку (Смоленск), Э. Г. Готману (Печора) и Н. Н. Шоластеру (Москва). Он надеется, что этот перечень будет в дальнейшем пополняться.

Некоторые задачи, принадлежащие Э. Г. Готману, вошли в этот задачник (№ 136, 622 и 635).

21 февраля 1961 г.

Ник. Бескин

ОТ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИКИ МГЗПИ

При работе над задачником-практикумом студент должен параллельно изучать теоретическую часть курса по учебнику С. И. Новоселова «Специальный курс тригонометрии». Часть задач и упражнений, помещенных в задачнике-практикуме, снабжена подробными решениями, которые также должны быть тщательно рассмотрены студентом перед тем, как он приступит к самостоятельному решению других задач и упражнений по соответствующей теме.

Все задачи, помещенные в основной раздел задачника-практикума, должны быть полностью решены студентом в межсессионный период. Полная проработка всего текста задачника-практикума должна быть завершена студентом-заочником не позже, чем за один месяц до начала очередной сессии. Вместо практиковавшихся до сих пор контрольных работ по тригонометрии студент-заочник получит от кафедры за один месяц до начала очередной сессии номера нескольких задач из данного задачника-практикума, решения которых он должен прислать в деканат в пятидневный срок. Непредставление в указанный срок решений этих задач будет рассматриваться как невыполнение контрольной работы со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Кафедра математики Московского государственного заочного педагогического института обращается к кафедрам математики педагогических институтов и ко всем студентам-заочникам с просьбой присылать свои соображения по задачнику-практикуму как с точки зрения самой идеи его составления, так и по его конкретному содержанию.

Если в процессе работы над задачником-практикумом студент-заочник столкнется с неясными вопросами, ему надлежит обращаться на кафедру математики МГЗПИ (Москва, пл. Революции, 3/1).

Кафедра математики МГЗПИ

ОСНОВНОЙ РАЗДЕЛ

§ 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Доказать тождества (№ 1—3).

1. $$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Решение. Используем формулы: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Средние члены (в числителе и знаменателе) выражаем как синус двойного аргумента:

$$\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

В этом рассуждении мы сократили дробь на $\cos\alpha+\sin\alpha$, что является незаконным в случае $\cos\alpha+\sin\alpha=0$, т. е. когда $\alpha=-\frac{\pi}{4}+k\pi$. В этом особом случае левая часть данного тождества принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, а правая часть равна -1. Возможны две точки зрения на этот случай.

1) Если при некотором значении α хотя бы одна из двух частей равенства теряет смысл, то равенство признается несправедливым при этом значении α. Таким образом, данное тождество справедливо для всех значений α, кроме значений вида $\alpha=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi$.

2) Если при некотором значении $\alpha=\alpha_0$ в равенстве $f(\alpha)=\varphi(\alpha)$ хотя бы одна из частей (например, левая) теряет смысл, то мы приписываем ей значение, равное $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha)$, т. е. считаем равенство справедливым, если $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha)=\varphi(\alpha_0)$. При решении уравнений приходится исследовать, так ли это. При доказательстве же тождеств такое исследование не требуется: если тождество $f(\alpha)=\varphi(\alpha)$ справедливо для всех значений α в некоторой двусторонней окрестности α_0 и если функция $\varphi(\alpha)$ непрерывна при $\alpha=\alpha_0$ (каковые условия в данной задаче соблюдаются), то тождество $f(\alpha)=\varphi(\alpha)$ при $\alpha=\alpha_0$ обязательно верно (в указанном выше смысле).

В этой книге принята вторая точка зрения.

2. $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+1=0.$

3. $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

4. Найти (точно) синус и косинус 15° и 75°.

Решение. Первый способ. Рассматриваем 15° как разность между 45° и 30°:

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cdot\cos 30°-\cos 45°\cdot\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°+\sin 45°\cdot\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Второй способ. Рассматриваем 15° как половину от 30°. Используем формулы (VI.1) и (VI. 2). Двойной знак не нужен, так как синус и косинус 15° заведомо положительны:

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$
$$\cos 15°=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Эти выражения можно упростить, пользуясь формулой (XVII. 1):

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \ \cos 75^\circ = \sin 15^\circ.$$

5. Найти x (точно), если $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Решение. Найдем $\cos 2x$ [формула (V. 36)]:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда одно из возможных решений: $2x = 45^\circ$, $x = 22^\circ 30'$. Но если $22^\circ 30'$ есть один из углов, имеющих такой синус, какой указан в условии задачи, то все углы, имеющие тот же синус, задаются формулой $x = 180^\circ k + (-1)^k 22^\circ 30'$.

Как видно, мы должны сначала догадаться, чему равен x, а затем эту догадку проверять. Без такой догадки неясно, почему мы вычисляли $\cos 2x$. В подобных задачах, если такая догадка затруднительна, рекомендуется обращаться к таблицам. В данном случае имеем:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142,$$

$$2-\sqrt{2} = 0{,}5858,$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{0{,}5858} = 0{,}7654,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 0{,}3827, \quad x = 22^\circ 30'.$$

6. Найти (точно) $\operatorname{tg} 11^\circ 15'$.

Доказать тождества (№ 7—9).

7. $\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} = 1 + 2\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + 2\cos 6\alpha.$

Решение. Первый способ. Заменим синусы по формуле Эйлера [формула (XIII. 5)]:

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} = \frac{e^{i\cdot 7\alpha} - e^{-i\cdot 7\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}.$$

Далее в ходе выкладок мы для краткости дважды делаем замену обозначений: $e^{i\alpha} = t$, $t^2 = s$.

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}=\frac{t^7-\dfrac{1}{t^7}}{t-\dfrac{1}{t}}=\frac{t^{14}-1}{t^8-t^6}=\frac{s^7-1^*}{s^4-s^3}=$$

$$=s^3+s^2+s+1+\frac{s^2+s+1}{s^3}=$$

$$=s^3+s^2+s+1+\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}=$$

$$=1+\left(s+\frac{1}{s}\right)+\left(s^2+\frac{1}{s^2}\right)+\left(s^3+\frac{1}{s^3}\right)=$$

$$=1+(e^{i2\alpha}+e^{-i2\alpha})+(e^{i4\alpha}+e^{-i4\alpha})+(e^{i6\alpha}+e^{-i6\alpha})=$$

$$=1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha.$$

Второй способ. Используем формулу (VIII. 3):

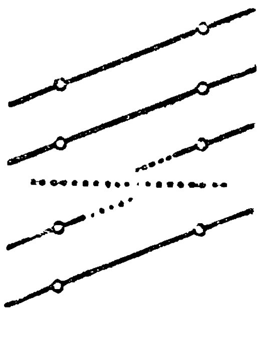
$$\sin\alpha\cdot\cos 6\alpha=\frac{1}{2}(\sin 7\alpha-\sin 5\alpha),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos 4\alpha=\frac{1}{2}(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{2}(\sin 3\alpha-\sin\alpha),$$

$$\sin\alpha\cdot\cos 0=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\alpha).$$

Сложим эти равенства. При сложении правых частей произойдет сокращение (см. схему):



$$\sin\alpha(1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 7\alpha+\sin\alpha).$$

Умножим на 2 и разделим на $\sin\alpha$:

$$2+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha=$$
$$=\frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}+1.$$

---

* Далее производится деление многочленов.

Особый случай: $\alpha = k\pi$ (см. решение задачи № 1).

8. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$.

Решение. Первый способ (слева направо). Сумму двух синусов преобразуем в произведение. Группируем первый член со вторым, а третий с четвертым (*по одинаковой разности аргументов*):

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha =$$
$$= 2\sin 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 6\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\cos\alpha(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha) = 2\cos\alpha\cdot 2\sin 4\alpha\cdot\cos 2\alpha.$$

Можно группировать первый член с четвертым, а второй с третьим (*по одинаковой сумме аргументов*).

Второй способ (справа налево). Преобразуем правую часть данного тождества в сумму по формуле (VIII. 6). Вывод этой формулы приводится в решении задачи № 43. Полагая в этой формуле $x = 4\alpha$, $y = \alpha$, $z = 2\alpha$, сразу получим нужное тождество.

9. $\dfrac{\sin 3\alpha\cdot\cos^3\alpha + \cos 3\alpha\cdot\sin^3\alpha}{3} = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}$.

10. 1) Выразить $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Решение. 1) По формуле бинома Ньютона:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + i\,n\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha -$$
$$-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha - i\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha + \ldots$$
$$\ldots + i^{n-1}n\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha + i^n\sin^n\alpha.$$

По формуле Моавра [формула (XIII.1)]:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Правые части этих равенств можно отождествить. Приравнивая отдельно действительные части, получим:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ldots$$

Последний член равен:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \cos\alpha \cdot \sin^{n-1}\alpha \text{ при } n \text{ нечетном,}$$

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \sin^n\alpha \text{ при } n \text{ четном.}$$

2) Выразить $\sin n\alpha$ через $\cos^n\alpha$ и $\sin^n\alpha$.

11. Упростить $\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25°$.

Решение. Объединяем первый член с четвертым, а второй с третьим (*по одинаковой сумме аргументов*):

$$\sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° =$$
$$= 2\cos 36° \sin 11° + 2\cos 36° \sin 25° =$$
$$= 2\cos 36° (\sin 11° + \sin 25°) =$$
$$= 4\sin 18° \cos 36° \cos 7° = 4\sin 18° (1 - 2\sin^2 18°) \cos 7° = \ldots$$

Но $\sin 18°$ можно определить, пользуясь теоремой: *хорда равна диаметру круга, умноженному на синус половины дуги, стягиваемой этой хордой.* Если за хорду взять сторону правильного вписанного десятиугольника, то

$$a_{10} = 2R \cdot \sin 18°,$$

откуда $\sin 18° = \frac{a_{10}}{2R}$. Из геометрии известно, что

$$a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Теперь можно вычислить:

$$1 - 2\sin^2 18° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Продолжаем прерванные выкладки:

$$\ldots = 4 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cdot \cos 7° = \cos 7°.$$

Примечание. Можно было бы обойтись без вычисления $\sin 18°$ и получить результат значительно более коротким, но зато и более искусственным приемом, а именно: дойдя до выражения $4\sin 18° \cos 36° \cos 7°$, следовало умножить и разделить его на $\cos 18°$. Дальнейшие выкладки протекали бы так:

$$4\sin 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ = \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cos 7^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ,$$

потому что $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$.

12. Вывести формулы для:

1) синуса суммы трех аргументов,
2) косинуса суммы трех аргументов,
3) тангенса суммы трех аргументов.

Решение. Первый способ. Преобразуем двумя различными способами выражение $e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$ [формула (XIII. 2)]:

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = \cos(\alpha+\beta+\gamma) + i\sin(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}\cdot e^{i\gamma} =$$
$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) =$$
$$= \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma + i(\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma).$$

Отождествляя правые части этих равенств (отдельно приравнивая действительные и мнимые члены), получим:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma -$$
$$- \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma,$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma +$$
$$+ \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Деля второе равенство на первое и после этого в правой части деля числитель и знаменатель почленно на $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}.$$

Второй способ.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin[(\alpha+\beta)+\gamma] =$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma =$$

$$= (\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)\cos\gamma +$$
$$+(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta)\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Формула для $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ выводится аналогично, формула для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$ получается делением.

13. Вычислить

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right).$$

Решение. Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg} 3$. Это значит

$$\operatorname{ctg}\alpha=3,\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

[Вообще $\operatorname{arcctg} x$ заключается в интервале $(0, \pi)$ [формула (XI.4)], но арккотангенс *положительного аргумента* принадлежит первой четверти.]. Вычисляем:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad \cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

(Двойной знак перед радикалом не берется, потому что α принадлежит первой четверти.) Далее используем формулу (VI. 5):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\sqrt{10}-3.$$

14. Упростить $\sin(2\arcsin x)$.

15. Вычислить $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

16. Упростить $\operatorname{ctg}(2\arccos x)$.

Доказать (№ 17—19).

17. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}=\frac{5\pi}{4}$.

Решение. Обозначим: $\alpha=\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}$, $\beta=\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}$.

Тогда

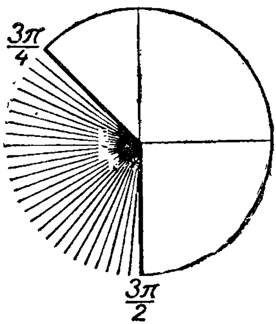
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2\beta - 1}{2\operatorname{ctg}\beta} = \frac{\frac{1}{9} - 1}{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + 2\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta} = \frac{-\frac{4}{21} - 1}{\frac{1}{7} - \frac{4}{3}} = 1.$$

Из того, что $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\beta) = 1$, еще нельзя *однозначно* определить $\alpha + 2\beta$. Необходимо установить достаточно узкие границы, в которых заключается $\alpha + 2\beta$; α принадлежит первой четверти. Кроме того, раз $\operatorname{ctg}\alpha < 1$, то $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Аналогичные замечания относятся и к β. Итак, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < 2\beta < \pi$. Складывая первое и третье неравенства, находим:

$$\frac{3\pi}{4} < \alpha + 2\beta < \frac{3\pi}{2}.$$



Черт. 1.

В этих границах (см. черт. 1) существует единственный аргумент, котангенс которого равен единице: это $\frac{5\pi}{4}$. Следовательно, $\alpha + 2\beta = \frac{5\pi}{4}$, т. е.

$$\operatorname{arcctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3} = \frac{5\pi}{4}.$$

18. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{9} = \frac{\pi}{4}.$

19. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$

Найти x из уравнений (№ 20—22).

20. $\operatorname{arctg} x = 2 \operatorname{arctg} a$.

Решение. Сначала найдем область возможных значений параметра a Для того чтобы правая часть могла представлять арктангенс, необходимо и достаточно:

$$-\frac{\pi}{2} < 2 \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{4},$$

$$-1 < a < 1.$$

Для нахождения x берем тангенс от обеих частей данного уравнения:

$$x = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} a) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a)} = \frac{2a}{1-a^2}.$$

Ответ. $x = \dfrac{2a}{1-a^2}$. Задача возможна только при $|a| < 1$.

21. $\operatorname{arcctg} x = \pi - \arcsin 3a$.

22. 1) $\arccos x = \arccos a - 2 \arcsin b$;

2) $\arcsin x = \arcsin a + 2 \arccos b$.

1) Решение. Прежде всего заметим, что должно быть: $|a| \quad 1$ и $|b| \leqslant 1$.

Правая часть может представлять собой арккосинус при условиях:

$$0 \leqslant \arccos a - 2 \arcsin b \leqslant \pi.$$

Рассмотрим эти условия отдельно.

$$\text{A)}\ \arccos a - 2 \arcsin b \geqslant 0.$$

Если $b \leqslant 0$, то условие A) всегда соблюдается (потому что оба члена левой части неотрицательны). Если же $b > 0$, то преобразуем условие A) так:

$$\arccos a \geqslant 2 \arcsin b,$$

$$\cos(\arccos a) \quad \cos(2 \arcsin b),$$

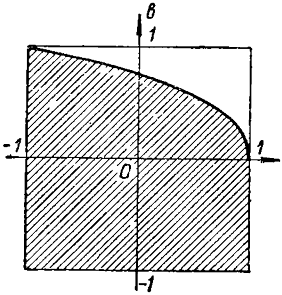
$$a \leqslant 1 - 2b^2.$$

Уравнение $a = 1 - 2b^2$ изображается параболой. Неравенство $a < 1 - 2b^2$ удовлетворяется для всех точек *внутри* этой параболы. Теперь ясно, что три условия:

1) $|a| \leqslant 1$,

2) $|b| \leqslant 1$,

3) при $b > 0$ $\quad a \leqslant 1 - 2b^2$



Черт. 2

определяют область, изображенную на чертеже 2 (включая границу). Для точек этой области (включая границу) соблюдается условие А), а также условия $|a|$ 1 и $|b|$ 1.

Переходим к условию В):

$$\arccos a - 2 \arcsin b \leqslant \pi.$$

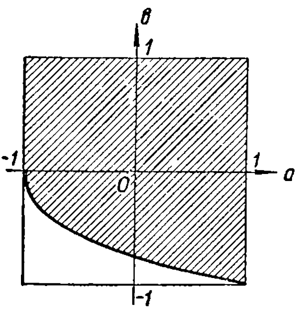
Если $b \geqslant 0$, то условие В) всегда соблюдается. Если же $b < 0$, то преобразуем условие В) так:

$$\arccos a \leqslant \pi + 2 \arcsin b,$$

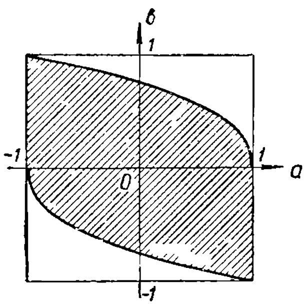
$$\cos (\arccos a) \geqslant \cos (\pi + 2 \arcsin b) = -\cos (2 \arcsin b),$$

$$a \geqslant 2b^2 - 1.$$

Итак, условие В) вместе с условиями $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$ определяет область, изображенную на чертеже 3 (напомним, что при $b \geqslant 0$ выполнения неравенства $a \geqslant 2b^2 - 1$ не требуется).



Черт. 3



Черт. 4

Чтобы задача была возможна необходимо одновременное выполнение условий А) и В). Эти условия выполняются в общей части областей, изображенных на чертежах 2 и 3 (см. черт. 4).

Значение x легко найти, беря косинус от обеих частей данного уравнения.

Ответ. $x = a(1-2b^2) + 2b\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$.

Задача возможна при одновременном соблюдении условий:

$$-1 \leqslant a \leqslant 1,$$

$$-\sqrt{\frac{1+a}{2}} \leqslant b \leqslant \sqrt{\frac{1-a}{2}}.$$

Эти условия иллюстрируются чертежом 4.

§ 2. УСЛОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

23. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ имеет место тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma.$$

Решение. Первый способ. Заметим, что $\operatorname{tg}\gamma =$

$$= \operatorname{tg}[\pi - (\alpha+\beta)] = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta).$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha+\beta) =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \cdot \frac{-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = -\operatorname{tg}\gamma\cdot(-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

Второй способ. Используем формулу для тангенса суммы трех аргументов [формула (IV. 11)]. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = 0$. Следовательно, числитель правой части формулы равен нулю (числитель и знаменатель этой формулы не могут одновременно быть нулями, см. задачу № 224), т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma.$$

24. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ имеет место тождество:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

25. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ имеет место тождество:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$$
$$=1+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right).$$

26. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ имеет место тождество:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$$

27. Доказать: если $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ и $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\gamma$, то либо $\alpha+\beta=2k\pi$, либо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$.

28. Доказать: если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, то $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$.

29. Доказать, что при $\alpha+\beta=\gamma$ имеет место тождество:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

30. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ имеет место тождество:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Решение. Первый способ (справа налево). По формуле (VIII. 4):

$$4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+$$
$$+\sin\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+$$
$$+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)=$$
$$=-\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\gamma+\sin\alpha+\sin\beta=$$
$$=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta.$$

Второй способ (слева направо):

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$$

$$+2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=\ldots$$

Заметим, что

$$\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}=\pi;\ \sin\frac{\gamma+\delta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\ldots=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right]=$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{4}\cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{4}=\ldots$$

Заметим, что

$$\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{4}=\frac{\alpha+\gamma}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{4}\right)=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right).$$

$$\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma}{4}-\frac{\beta+\gamma}{4}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Поэтому

$$\cos\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}=\sin\frac{\alpha+\gamma}{2},\quad \cos\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}=\sin\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

31. Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ имеет место тождество:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}.$$

32. Доказать: если $\frac{\sin^4\alpha}{m}+\frac{\cos^4\alpha}{n}=\frac{1}{m+n}$, то

$$\frac{\sin^8\alpha}{m^3}+\frac{\cos^8\alpha}{n^3}=\frac{1}{(m+n)^3};\quad (m\neq -n).$$

Решение. План решения:

1) из первого равенства найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$,

2) подставим их во второе равенство и убедимся, что они ему удовлетворяют.

Для краткости обозначим:

$$\cos 2\alpha = x.$$

Тогда

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-x),\ \sin^4\alpha = \frac{1}{4}(1-2x+x^2),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+x),\ \cos^4\alpha = \frac{1}{4}(1+2x+x^2).$$

Подставляем эти значения в первое уравнение:

$$\frac{1-2x+x^2}{4m}+\frac{1+2x+x^2}{4n}=\frac{1}{m+n},$$

или после упрощений:

$$(m+n)^2x^2+2(m-n)(m+n)x+(m-n)^2=0.$$

Сразу видно, что это уравнение может быть переписано так:

$$[(m+n)x+(m-n)]^2=0,$$

откуда

$$x=\frac{n-m}{n+m}.$$

Далее:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n-m}{n+m}\right)=\frac{m}{n+m},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{n-m}{n+m}\right)=\frac{n}{n+m}.$$

Подставляем эти значения во второе уравнение:

$$\frac{m^4}{(n+m)^4m^3}+\frac{n^4}{(n+m)^4n^3}=\frac{1}{(m+n)^3},$$

что верно.

Доказать (№ 33—35).

33. Если $\sin^2\beta=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, то $\cos 2\beta = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

34. Если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ суть корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cdot\cos^2(\alpha+\beta)=q$.

Решение. Из условия задачи вытекает, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=-p$, $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=q$. Преобразуем данное выражение, стараясь, чтобы в нем фигурировали только сумма и произведение тангенсов:

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2(\alpha+\beta)\left[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q\right]=$$
$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}\left[\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+p\cdot\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+q\right]=\ \ldots$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\frac{p}{q-1}.$$

Продолжаем:

$$\ldots=\frac{1}{1+\frac{p^2}{(q-1)^2}}\left[\frac{p^2}{(q-1)^2}+\frac{p^2}{q-1}+q\right]=$$
$$=\frac{p^2}{p^2+(q-1)^2}+\frac{p^2(q-1)}{p^2+(q-1)^2}+\frac{q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}=$$
$$=\frac{p^2q+q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}=q.$$

35. Если $\sin(\pi\cdot\operatorname{ctg}\alpha)=\cos(\pi\cdot\operatorname{tg}\alpha)$, то либо $\csc 2\alpha=k+\frac{1}{4}$, либо $\operatorname{ctg}2\alpha=k+\frac{1}{4}$.

Решение. Преобразуем данное равенство, используя формулу (VII. 12):

$$\cos\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)\right]=0,$$

откуда получаются две возможности:

$$1)\ \cos\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\right]=0,$$
$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2k+\frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{\sin 2\alpha}=2k+\frac{1}{2} \quad \text{[см. формулу (VII. 19)]},$$

$$\operatorname{csc} 2\alpha=k+\frac{1}{4}.$$

Это возможно при $\left|k+\frac{1}{4}\right|\geqslant 1$, т. е.

$$\text{либо } k+\frac{1}{4}\leqslant -1,\ k\leqslant -\frac{5}{4},$$

$$\text{либо } k+\frac{1}{4}\geqslant 1,\ k\geqslant \frac{3}{4}.$$

Так как, кроме того, k — целое, то выходит, что k может принимать любые целые значения, за исключением -1 и 0.

$$2)\ \cos\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)\right]=0,$$

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2k-\frac{1}{2},$$

$$-2\operatorname{ctg}2\alpha=-2k-\frac{1}{2} \quad \text{[см. формулу (VII. 20)]},$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=k+\frac{1}{4}.$$

Здесь k — любое целое число.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ В СУММЫ

Преобразовать в произведения (привести к «логарифмическому виду» № 36—38).

36. $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

37. $\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha$.

Решение. Объединяем, например, первые два члена:

$$\sin 3\alpha+\sin 7\alpha+\sin 10\alpha=2\sin 5\alpha\cdot\cos 2\alpha+$$
$$+2\sin 5\alpha\cdot\cos 5\alpha=2\sin 5\alpha(\cos 2\alpha+\cos 5\alpha)=$$
$$=4\sin 5\alpha\cdot\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}.$$

Тот же результат получится, если начать с объединения любой другой пары членов.

38. 1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$,

2) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)$.

39. Преобразовать в произведение при помощи введения вспомогательного угла $\sqrt{a^2-b^2}$ $(|b|\leqslant|a|)$.

Решение. Положим:

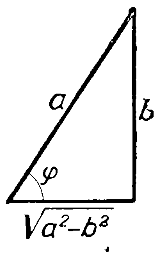
$$\left|\frac{b}{a}\right|=\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ.$$

Область значений φ выбрана так, чтобы $\sin\varphi$ пробегал все возможные для него значения по одному разу. Расширение этой области было бы бесполезно и внесло бы многозначность в дальнейшие выкладки:

$$\sqrt{a^2-b^2}=|a|\cdot\sqrt{1-\sin^2\varphi}=|a|\cdot\cos\varphi.$$

Заметим, что в силу условия $0\leqslant\varphi\leqslant 90^\circ$ $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ (без двойного знака).

При $a>0$ и $b>0$ полученный ответ иллюстрируется чертежом 5.



Черт. 5

40. При помощи введения вспомогательного угла представить в виде произведений корни уравнения $x^2+px+q=0$ в случае, когда $p^2-4q>0$ и $q>0$.

41. Преобразовать в произведение при помощи введения вспомогательного угла:

$$\sqrt{4\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{4\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}.$$

42. Определить амплитуду и начальную фазу гармонических колебаний:

1) $s=2\cos t+3\sin t$,

2) $s=\cos(2t-1)+\sin(2t+5)$.

Решение. 1) $s = 2\cos t + 3\sin t = \dots$
Выносим за скобку $\sqrt{2^2+3^2}$ (это и есть амплитуда),

$$\dots = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin t\right) = \dots$$

Обозначим:

$$A = \sqrt{13} = 3{,}6056.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\varphi = \dfrac{2}{A} = 0{,}55470, \\ \cos\varphi = \dfrac{3}{A} = 0{,}83205, \\ (0 < \varphi < 90^\circ), \end{array}\right\} \text{откуда } \varphi = 33^\circ 41'.$$

$$\dots = A(\sin\varphi\cos t + \cos\varphi\cdot\sin t) = A\cdot\sin(t+\varphi).$$

2) Преобразуем сначала данное выражение по формуле (VII. 9):

$$\cos(2t-1) + \sin(2t+5) =$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+2+2t\right) = \dots$$

Обращаемся к таблицам:

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}78540, \quad \frac{\pi}{4}+3 = 3{,}78540,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\right) = \sin 3{,}78540 = -0{,}60025.$$

Продолжаем прерванные вычисления:

$$\dots = -1{,}2005\sin(2{,}78540+2t) = \dots$$

Можно потребовать, чтобы начальная фаза заключалась между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Замечая, что $\pi = 3{,}14159$, напишем:

$$2{,}78540 = \pi - 0{,}35619$$

и далее:

$$\dots = -1{,}2005\cdot\sin[\pi-(0{,}35619-2t)] =$$
$$= 1{,}2005\sin(2t-0{,}35619).$$

43. Преобразовать в сумму:

1) $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$,

2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$,

3) $\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$,

4) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Решение. Первый способ. Используем формулу (VIII. 1):

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma]=$$

$$=\frac{1}{4}[\cos(\alpha-\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Второй способ. Будем исходить из формулы (IV. 10):

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-$$
$$-\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma.$$

Для краткости обозначим временно:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=A,$$
$$\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=B,$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma=C,$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=D.$$

Изменяя знаки α, β, γ и замечая, что

изменение знака α влечет изменение знаков C и D,

» » β » » » B » D,

» » γ » » » B » C,

получим еще три формулы. Выпишем все четыре:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=A-B-C-D,$$
$$\cos(-\alpha+\beta+\gamma)=A-B+C+D,$$
$$\cos(\alpha-\beta+\gamma)=A+B-C+D,$$
$$\cos(\alpha+\beta-\gamma)=A+B+C-D.$$

Составим следующие две линейные комбинации из этих равенств:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)=4A,$$

$$-\cos(\alpha+\beta+\gamma)-\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha+\beta-\gamma)=4B,$$

откуда, восстанавливая смысл обозначений A и B,

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)],$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta+\gamma)-\cos(-\alpha+\beta+\gamma)+$$
$$+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)].$$

Чтобы решить примеры 2) и 4), надо повторить аналогичные рассуждения, отправляясь от формулы (IV. 9). Ответ — см. формулы (VIII. 6) и (VIII. 4).

Легко понять, почему произведения 1) и 3) выражаются через косинусы: они не изменяются при одновременном изменении знаков α, β и γ. Произведения же 2) и 4) изменяют свое значение на противоположное при одновременном изменении знаков α, β и γ и потому выражаются через синусы.

44. Преобразовать в сумму:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos(\alpha+\beta).$$

45. Вычислить (точно) $\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$.

Решение. Обозначим искомое произведение через x:

$$x=\cos 20^\circ\ \cos 40^\circ\ \cos 80^\circ.$$

Умножим обе части этого равенства на $\sin 20^\circ$ и затем три раза используем формулу

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

$$x\cdot\sin 20^\circ=\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$$
$$=\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{4}\sin 80^\circ\cos 80^\circ=$$
$$=\frac{1}{8}\sin 160^\circ=\frac{1}{8}\sin 20^\circ,$$

откуда

$$x=\frac{1}{8}.$$

46. Понизить степень (до первой):

1) $\cos^3\alpha$, 2) $\sin^3\alpha$.

Решение. Первый способ:

$$\cos^3\alpha=\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)^3=\frac{e^{i\cdot3\alpha}+3e^{i\alpha}+3e^{-i\alpha}+e^{-i\cdot3\alpha}}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i\cdot3\alpha}+e^{-i\cdot3\alpha}}{2}+\frac{3}{4}\,\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=\frac{1}{4}\cos3\alpha+\frac{3}{4}\cos\alpha.$$

$$\sin^3\alpha=\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)^3=\frac{e^{i\cdot3\alpha}-3e^{i\alpha}+3e^{-i\cdot\alpha}-e^{-i\cdot3\alpha}}{-8i}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i\cdot3\alpha}-e^{-i\cdot3\alpha}}{2i}+\frac{3}{4}\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\cdot\alpha}}{2i}=-\frac{1}{4}\sin3\alpha+\frac{3}{4}\sin\alpha.$$

Второй способ:

$$\cos^3\alpha=\cos^2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\cos2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos3\alpha)=$$

$$=\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos3\alpha.$$

Для $\sin^3\alpha$ рассуждение аналогично, ответ — см. формулу (IX.15).

Понизить степень (до первой) (№ 47 и 48).

47. 1) $\cos^4\alpha$, 2) $\sin^4\alpha$.

48. $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

§ 4. УРАВНЕНИЯ

49. Решить уравнения:

1) $\sin x-\cos x=1$.

Решение. Для решения уравнений вида $a\sin x+b\cos x=c$ существует много способов. Укажем три из них.

Первый способ. Выразить $\cos x$ через $\sin x$ (или наоборот):

$$\sin x \pm \sqrt{1-\sin^2 x} = 1,$$
$$\pm \sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - \sin x,$$
$$1 - \sin^2 x = (1 - \sin x)^2,$$
$$\sin x \cdot (1 - \sin x) = 0,$$

откуда либо A) $\sin x = 0$, $x = 180^\circ n$,

» B) $\sin x = 1$, $x = 90^\circ + 360^\circ k = 90^\circ (4k+1)$.

Недостаток этого способа заключается в том, что он содержит возведение уравнения в квадрат и поэтому может приводить к лишним корням. Следовательно, применение этого способа должно сопровождаться проверкой. Проверяя решение $x = 180^\circ n$ (подстановкой в заданное уравнение). мы видим, что оно верно только при нечетном n, т. е. при $n = 2k+1$. Второе решение верно всегда. Итак, имеем две серии решений:

$$x = 180^\circ (2k+1) \text{ и } x = 90^\circ (4k+1).$$

Второй способ. Преобразуем левую часть в произведение методом введения вспомогательного угла (вынося за скобки амплитуду $A = \sqrt{a^2+b^2}$ и вводя начальную фазу φ по формулам $\sin\varphi = \frac{a}{A}$, $\cos\varphi = \frac{b}{A}$). В данной задаче можно также воспользоваться формулой (VII. 16):

$$-\sqrt{2}\cos(45^\circ + x) = 1,$$
$$\cos(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$45^\circ + x = 360^\circ n \pm 135^\circ,$$
$$x = 45^\circ (8n - 1 \pm 3).$$

Беря верхний и нижний знаки, мы получим отдельно решения, к которым пришли первым способом.

Третий способ Возведем данное уравнение в квадрат, после чего умножим правую часть на $\sin^2 x + \cos^2 x$:

$$a^2 \sin^2 x + 2ab \sin x \cdot \cos x + b^2 \cos^2 x = c^2 (\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Теперь получилось уравнение, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$. Делим его на $\cos^2 x$ и получаем уравнение, содержащее одну неизвестную функцию ($\operatorname{tg} x$). При этом могут потеряться решения, для которых $\cos x = 0$. Поэтому надо специально испытать значения $x = 90° + 180° k$.

В данной задаче вследствие ее индивидуальных особенностей следует действовать иначе: после возведения в квадрат сразу определяется $\sin 2x$:

$$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1,$$

откуда

$$\sin 2x = 0.$$

$$2x = 180° n; \quad x = 90° n.$$

Проверка обязательна. Она показывает, что значения $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 2$ годятся, а $n = 4k$ и $n = 4k + 3$ не годятся.

2) $\sin x + \cos x = 0{,}3$,

3) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$.

Решить уравнения (№ 50—71).

50. $7\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x = 15\cos^2 x$.

51. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Решение. Будем рассматривать левую часть как сумму кубов:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^2 x \cdot \cos^2 x;$$

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 0;$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = 0;$$

$$\cos^2 2x = 0;$$

$$\cos 2x = 0;$$

$$2x = 90° (2k + 1), \quad x = 45° (2k + 1).$$

52. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

53. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 6$.

54. $\cos 2x + \sin 2x - \cos x + \sin x = 1$.

55. $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

Решение. $\sin 2x$ легко выражается через $\sin x + \cos x$:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2 - 1.$$

Поэтому данное уравнение можно переписать так:

$$3(\sin x + \cos x) = 2[(\sin x + \cos x)^2 - 1].$$

Обозначим:

$$\sin x + \cos x = y.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$2y^2 - 3y - 2 = 0,$$

откуда $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 2$. Второе значение невозможно, потому что $\sin x + \cos x$ не может равняться 2. Следовательно,

$$\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$$

или [формула (VII. 13)]

$$\sqrt{2}\sin(45^\circ + x) = -\frac{1}{2},$$

$$\sin(45^\circ + x) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \approx -0{,}35355,$$

$$45^\circ + x = 180^\circ k - (-1)^k \varphi, \quad \text{где } \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 20^\circ 42',$$

$$x = 45^\circ(4k - 1) + (-1)^{k+1}\varphi.$$

56. $\operatorname{tg} x = 2\cos\frac{x}{2}$.

57. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

Решение. Сумму первых двух членов преобразуем в произведение:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0,$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x + \cos x \cdot \cos 2x)}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x} = 0$$

Заметим, что левая часть данного уравнения теряет смысл в следующих случаях:

$$\cos x = 0, \quad x = 90^\circ(2n+1);$$
$$\cos 2x = 0, \quad x = 45^\circ(2n+1);$$
$$\cos 3x = 0, \quad x = 30^\circ(2n+1).$$

Приравниваем нулю каждый из множителей числителя:

1) $\sin 3x = 0, \quad x = 60^\circ k.$

Проверим, не может ли это решение принять одно из «запрещенных» значений:

a) $60^\circ k = 90^\circ(2n+1)$; $2k = 3(2n+1)$. Этого не может быть, потому что $2k$ — четное число, а $3(2n+1)$ — нечетное;

b) $60^\circ k = 45^\circ(2n+1)$; $4k = 3(2n+1)$ — не может быть;

c) $60^\circ k = 30^\circ(2n+1)$; $2k = 2n+1$ — не может быть. Следовательно, ответ $x = 60^\circ k$ годится при любом k.

2) $\cos 3x + \cos x \cdot \cos 2x = 0,$

$\cos x(4\cos^2 x - 3) + \cos x(2\cos^2 x - 1) = 0$ [см. формулы (V. 45) и (V. 31)]:

$\cos x(3\cos^2 x - 2) = 0,$

2_1) $\cos x = 0$. Не годится!

2_2) $\cos x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \approx \pm 0{,}81650,$

откуда $x = 180^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 35^\circ 16'$.

58. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}.$

59. $\sin 5x = 16\sin^5 x.$

Решение. В правой части понизим степень [см. формулу (IX. 16)]:

$$\sin 5x = 10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x.$$

Далее преобразуем $\sin 3x$ по формуле (V. 22):

$$2\sin x - \sin x(-4\sin^2 x + 3) = 0,$$

$$\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0,$$

1) $\sin x = 0, \qquad x = 180^\circ k;$

2) $\sin x = \pm \frac{1}{2}, \quad x = 30^\circ (6k \pm 1).$

Примечание Можно было бы начать с преобразования левой части данного уравнения по формуле (V. 23). В этом случае выкладки будут немного длиннее.

60. $\sin 5x + \cos 5x + \sin 7x + \cos 7x = 0.$

61. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x - \cos x - \cos 2x = 1.$

Решение.

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x - \cos x - (1 + \cos 2x) = 0.$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos x + 2 \sin x \cdot \cos x - \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

$$\cos x (2 \sin 2x + 2 \sin x - 1 - 2 \cos x) = 0.$$

$$\cos x (4 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x - 1 - 2 \cos x) = 0.$$

$$\cos x [2 \sin x (1 + 2 \cos x) - (1 + 2 \cos x)] = 0.$$

$$\cos x (1 + 2 \cos x)(2 \sin x - 1) = 0.$$

1) $\cos x = 0, \quad x = 90^\circ (2k + 1).$

2) $1 + 2 \cos x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = 120^\circ (3k \pm 1).$

3) $2 \sin x - 1 = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = 30^\circ [6k + (-1)^k].$

62. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x.$

63. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$

*64. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2.$

65. $\cos x + \cos y - \cos (x + y) = \frac{3}{2}.$

Решение. Это уравнение может быть решено, хотя оно и с двумя неизвестными. Причина заключается в том, что $\frac{3}{2}$ — максимальное значение функции, стоящей в левой части. Если бы в правой части задать число большее, чем $\frac{3}{2}$, то уравнение не имело бы действительных решений, а если меньшее, чем $\frac{3}{2}$, то задача была бы неопределенной.

Данное уравнение может быть решено многими способами, более или менее искусственными. Укажем два из них.

Первый способ. Положим:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u, \quad \operatorname{tg}\frac{y}{2}=v.$$

В таком случае

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$

[см. формулы (VI. 7) и (VI. 6)]. Аналогично $\cos y$ и $\sin y$ выражаются через v. Преобразуем данное уравнение так:

$$\cos x+\cos y-\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=\frac{3}{2},$$

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{1-v^2}{1+v^2}-\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}+\frac{4uv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{3}{2},$$

$$3(1+u^2)(1+v^2)-2(1-u^2)(1+v^2)-2(1+u^2)(1-v^2)+$$
$$+2(1-u^2)(1-v^2)-8uv=0,$$

$$u^2+v^2-8uv+9u^2v^2+1=0,$$

$$(u-v)^2+9u^2v^2-6uv+1=0,$$

$$(u-v)^2+(3uv-1)^2=0,$$

откуда

$$u-v=0, \quad 3uv-1=0.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{tg}\frac{y}{2}; \quad 3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-1=0.$$

Получаем две возможности:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x=60^\circ(6m+1),$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y=60^\circ(6n+1).$$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x=60^\circ(6m-1),$

$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y=60^\circ(6n-1).$

Второй способ. Преобразуем левую часть данного уравнения по формулам (VII. 3) и (V. 31):

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\cos^2\frac{x+y}{2}+1=\frac{3}{2},$$

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}+2\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

Выразим отсюда $2\cos\frac{x-y}{2}$:

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1+4\cos^2\frac{x+y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}},$$

или

$$2\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2\cos\frac{x+y}{2}}+2\cos\frac{x+y}{2}.$$

В правой части — сумма двух обратных величин. Она по модулю $\geqslant 2$ [см. формулу (XVII. 2)]. Левая часть по модулю $\leqslant 2$. Поэтому равенство может иметь место лишь в том случае, когда каждая часть равенства по модулю равна 2. Получаем две возможности:

a) $\cos\frac{x-y}{2}=1, \quad \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}, \qquad \begin{cases} x-y=720^\circ m, \\ x+y=120^\circ(6n\pm 1). \end{cases}$

b) $\cos\frac{x-y}{2}=-1, \quad \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}, \qquad \begin{cases} x-y=360^\circ(2m+1), \\ x+y=240^\circ(3n\pm 1). \end{cases}$

66. $\sec 5x=\cos 2x.$

Решение. $|\sec 5x|\geqslant 1$, $|\cos 2x|\leqslant 1$. Поэтому равенство $\sec 5x=\cos 2x$ может иметь место лишь в двух случаях:

1) $\sec 5x=\cos 2x=1,$

2) $\sec 5x = \cos 2x = -1$.

Исследуем эти случаи:

1) $5x = 360°m;\quad x = 72°m,$

$2x = 360°n;\quad x = 180°n.$

Следовательно, $72°m = 180°n$, или (сокращая на 36°) $2m = 5n$. Это возможно, если $m = 5k$, $n = 2k$. Таким образом, $x = 360°k$.

2) $5x = 180°(2m+1);\quad x = 36°(2m+1),$

$2x = 180°(2n+1);\quad x = 90°(2n+1).$

Следовательно, $36°(2m+1) = 90°(2n+1)$, или $2(2m+1) = 5(2n+1)$. Это равенство невозможно (левая часть — четная, правая — нечетная). Значит, второй случай не может иметь места.

67. $\sin x \cdot \sin y = 1$.

Решение. Если бы один из двух сомножителей был по абсолютной величине меньше единицы, то другой должен быть больше единицы, что невозможно. Поэтому данное уравнение может удовлетворяться только в следующих случаях:

1) $\sin x = 1;\quad x = 90°(4m+1),$

$\sin y = 1;\quad y = 90°(4n+1),$

2) $\sin x = -1;\quad x = 90°(4m-1),$

$\sin y = -1;\quad y = 90°(4n-1).$

*68. $\sin x + \sin 5x = 2$.

69. $3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{\lg \operatorname{ctg} x} = 2$.

Решение. Предварительно отметим, что область допустимых значений x такова:

$$90° \cdot 2k < x < 90°(2k+1).$$

В самом деле, во-первых, x не должен равняться 0,90° и т. д., потому что при этих значениях не существует либо тангенс, либо котангенс. Во-вторых, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ должны быть оба положительны (иначе не существовал бы их логарифм), т. е. x должен оканчиваться в первой или третьей четверти.

Далее заметим, что $\lg \operatorname{ctg} x = -\lg \operatorname{tg} x$. Поэтому данное уравнение можно записать так:

$$y + \frac{1}{y} = 2, \text{ где } y = 3^{\lg \operatorname{tg} x}.$$

Последнее уравнение можно решить как квадратное уравнение. Однако проще рассуждать так. Ясно, что $y > 0$. Известно, что сумма положительных взаимно обратных величин удовлетворяет неравенству

$$y + \frac{1}{y} \geqslant 2$$

[см. формулу (XVII. 2)]. Минимальное значение достигается при $y = 1$. Следовательно,

$$3^{\lg \operatorname{tg} x} = 1,$$

$$\lg \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = 45^\circ (4k + 1).$$

Все эти значения x принадлежат области допустимых значений.

70. $\sin(x + \alpha) + \sin x = \cos \frac{\alpha}{2}$.

71. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}(\alpha + x) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - x) = 0$.

72. Найти значения x в интервале $-\pi < x < \pi$, удовлетворяющие уравнению $\sin(x - 2) = \sin(3x - 4)$.

Решение.

$$\sin(x - 2) - \sin(3x - 4) = 0,$$

$$\sin(x - 1)\cos(2x - 3) = 0,$$

1) $\sin(x - 1) = 0, \quad x = k\pi + 1$.

Теперь найдем допустимые значения k, исходя из условия $-\pi < x < \pi$:

$$-\pi < k\pi + 1 < \pi,$$

$$-\pi - 1 < k\pi < \pi - 1,$$

$$-1 - \frac{1}{\pi} < k < 1 - \frac{1}{\pi},$$

$$-1{,}3 < k < 0{,}7, \text{ т. е. } k = -1 \text{ или } 0.$$

2) $\cos(2x - 3) = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}(2k + 1) + \frac{3}{2}$.

Найдем допустимые значения k:

$$-\pi < \frac{\pi}{4}(2k+1)+\frac{3}{2} < \pi,$$

$$-\pi-\frac{3}{2} < \frac{\pi}{4}(2k+1) < \pi-\frac{3}{2},$$

$$-4-\frac{6}{\pi} < 2k+1 < 4-\frac{6}{\pi},$$

$$-5-\frac{6}{\pi} < 2k < 3-\frac{6}{\pi},$$

$$-\frac{5}{2}-\frac{3}{\pi} < k < \frac{3}{2}-\frac{3}{\pi},$$

$$-3{,}5 < k < 0{,}5, \text{ т. е. } k = -3, \ -2, \ -1 \text{ и } 0.$$

Задача имеет шесть решений (мы нумеруем их в порядке возрастания):

$$x_1 = -\frac{5\pi}{4}+\frac{3}{2} \approx -2{,}42699, \quad x_4 = -\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2} \approx 0{,}71460,$$

$$x_2 = -\pi+1 \approx -2{,}14159, \qquad x_5 = 1,$$

$$x_3 = -\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2} \approx -0{,}85619, \quad x_6 = \frac{\pi}{4}+\frac{3}{2} \approx 2{,}28540.$$

73. Решить и исследовать уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = m(1-\cos x).$$

Решение. Обозначим $\cos x = y$. Тогда данное уравнение запишется так:

$$\frac{1-y^2}{y^2} = m(1-y).$$

Далее:

$$1-y)(1+y) = my^2(1-y),$$

$$(1-y)(my^2-y-1) = 0,$$

откуда находим три корня:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2m}, \quad y_3 = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2m}.$$

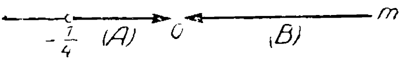
Первый корень не зависит от m. Для существования двух других решений требуется, *во-первых*,

$$1+4m \geqslant 0, \text{ откуда } m \geqslant -\frac{1}{4},$$

во-вторых,

$$m \neq 0.$$

Таким образом, мы *пока* получаем для m две области:



Черт. 6

$$(A)\ -\frac{1}{4} \leqslant m < 0, \quad (B)\ \ 0 < m < \infty \quad (\text{черт. } 6).$$

В-третьих, необходимо, чтобы было $|y_2| \leqslant 1$ и $|y_3| \leqslant 1$. Исследуем каждый из этих корней в каждой из двух областей.

Это исследование облегчится, если мы перенесем иррациональность в знаменатель:

$$y_2 = \frac{2}{\sqrt{1+4m}-1}, \qquad y_3 = -\frac{2}{\sqrt{1+4m}+1}.$$

Корень y_2 в области (A) отрицателен. Требуем:

$$\frac{2}{\sqrt{1+4m}-1} \geqslant -1,$$

откуда $\sqrt{1+4m} \leqslant -1$, что абсурдно. Поэтому y_2 в области (A) не годится (т. е. не приводит к решениям для x). В области (B) $y_2 > 0$. Требуем:

$$\frac{2}{\sqrt{1+4m}-1} \leqslant 1,$$

откуда $\sqrt{1+4m} \geqslant 3$, $1+4m \geqslant 9$, $m \geqslant 2$. Итак, y_2 годится при $m \geqslant 2$.

Корень y_3 всегда отрицателен. Требуем:

$$-\frac{2}{\sqrt{1+4m}+1} \geqslant -1,$$

откуда $\sqrt{1+4m} \geqslant 1,\ 1+4m \geqslant 1,\ m \geqslant 0$. Это условие не соблюдается в области (A) и соблюдается в области (B).

Проделанное исследование можно было бы сократить, если бы заметить, что при $m<0$ никакие решения, кроме $\cos x = 1$, невозможны (это видно непосредственно из данного уравнения). Поэтому можно было бы не производить исследования корней y_2 и y_3 в области (A).

Ответ. Уравнение при всех значениях m имеет решение $\cos x = 1$. При $0 < m < \infty$ оно, кроме того, имеет еще одно решение*: $\cos x = \frac{1-\sqrt{1+4m}}{2m}$. При $2 \leqslant m < \infty$ но, кроме упомянутых двух, имеет еще и третье решение: $\cos x = \frac{1+\sqrt{1+4m}}{2m}$. При $m=2$ последнее решение совпадает с первым.

74. Решить и исследовать уравнение:

$$2\sec^2 x - 3\sec x + a = 0.$$

75. Решить и исследовать уравнение:

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a.$$

Решение. Обозначим $y = \cos 2x$. Тогда данное уравнение запишется так:

$$\left(\frac{1-y}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+y}{2}\right)^5 = a.$$

Далее:

$$(1-y)^5 + (1+y)^5 = 32a,$$

$$(1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5) +$$
$$+(1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5) = 32a,$$
$$1+10y^2+5y^4 = 16a.$$

Обозначим $z = \cos 4x$. Тогда

$$y^2 = \cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1+z}{2},$$

и уравнение примет вид:

$$1 + 5(1+z) + \frac{5}{4}(1+z)^2 = 16a,$$

---

* Под словами «одно решение» мы здесь понимаем одно значение $\cos x$. Разумеется, оно приводит к бесконечной последовательности значений x.

или

$$5z^2+30z+29-64a=0^*,$$

$$z=\frac{-15\pm 4\sqrt{5+20a}}{5}.$$

Прежде всего должно быть $5+20a\geqslant 0$, $a\geqslant -\frac{1}{4}$. Теперь исследуем каждое из двух значений z отдельно:

$$-1\leqslant\frac{-15+4\sqrt{5+20a}}{5}\leqslant 1,$$

$$-5\leqslant -15+4\sqrt{5+20a}\leqslant 5,$$

$$\frac{5}{2}\leqslant\sqrt{5+20a}\leqslant 5,$$

$$\frac{25}{4}\leqslant 5+20a\leqslant 25,$$

$$\frac{1}{16}\leqslant a\leqslant 1\ \left(\text{при этом соблюдается и неравенство } a\geqslant -\frac{1}{4}\right).$$

Второе значение z заведомо отрицательно. Требуем:

$$\frac{-15-4\sqrt{5+20a}}{5}\geqslant -1.$$

$15+4\sqrt{5+20a}\leqslant 5$. Это невозможно.

Таким образом, второе значение z при любом a не годится.

Ответ. Задача возможна при $\frac{1}{16}\leqslant a\leqslant 1$.

$$\cos 4x=\frac{-15+4\sqrt{5+20a}}{5}.$$

76. Доказать, что уравнение $2x+\sin 2x=\frac{2\pi}{n}$ при $n>2$

---

* Это уравнение можно получить быстрее, если воспользоваться формулами (IX. 5) и (IX. 14). Сразу получим:

$$\frac{1}{2^8}(126+120\cos 4x+10\cos 8x)=a,$$

$$126+120z+10\cdot\frac{1+z}{2}=256a \qquad (z=\cos 4x)$$

и дальше, как в тексте.

имеет единственный корень; этот корень заключен между 0 и $\frac{\pi}{n}$.

Решение. Перепишем данное уравнение так:

$$\sin 2x = \frac{2\pi}{n} - 2x.$$

Рассмотрим графики:

$$y = \sin 2x, \tag{a}$$

$$y = \frac{2\pi}{n} - 2x. \tag{b}$$

Линия (b) — прямая, отсекающая на осях X и Y отрезки соответственно $\frac{\pi}{n}$ и $\frac{2\pi}{n}$; ее угловой коэффициент равен -2.

Линия (a) — синусоида. В начале координат ее угловой коэффициент равен 2, потому что при стремлении аргумента к нулю синус эквивалентен своему аргументу (их отношение стремится к 1) и, значит, угловой коэффициент $y = \sin 2x$ при $x = 0$ такой же, как у линии $y = 2x$. В точке $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ (черт. 7) угловой коэффициент равен -2 (по симметрии). Прямая (b) при $n = 2$ тоже проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и имеет угловой коэффициент -2. Следовательно, эта прямая — касательная к синусоиде в точке A.

Увеличивая n, мы будем получать прямые, параллельные этой касательной и расположенные ближе к началу. Ясно, что каждая такая прямая пересекает синусоиду в одной точке. Впрочем, это можно доказать аналитически. Рассмотрим функцию

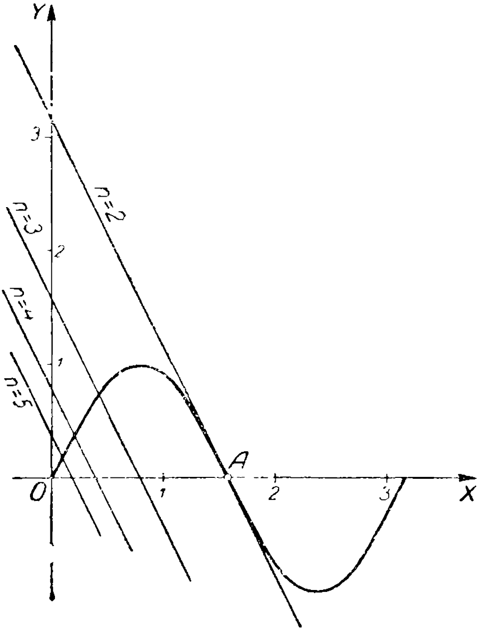
$$f(x) = \sin 2x + 2x - \frac{2\pi}{n}$$

и вычислим ее приращение:

$$f(x+h) - f(x) = \sin 2(x+h) - \sin 2x + 2h =$$
$$= 2\sin h \cdot \cos(2x+h) + 2h.$$

Знак этого приращения совпадает со знаком h, потому что $|\sin h| < |h|$ и $|\cos 2(x+h)| \leqslant 1$. Значит, $f(x)$ монотонно возрастает. Если при некотором значении x линии

(a) и (b) пересекаются, то (при этом значении x) $f(x)=0$. Так как $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает, то она не может обращаться в нуль более одного раза.



Черт. 7

Итак, каждая прямая (b) при $n>2$ пересекает синусоиду (a) в одной точке. Абсцисса этой точки заключена между 0 и $\frac{\pi}{n}$, потому что $\frac{\pi}{n}$ — отрезок, отсекаемый этой прямой на оси X.

Только при $n=2$ упомянутая абсцисса равна $\frac{\pi}{n}$, т. е. равна $\frac{\pi}{2}$.

77. Доказать, что уравнение $x+\cos x=a$ при любом a имеет ровно один корень.

78. Зная, что α и β суть два существенно различных* корня уравнения $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$, определить $\sin\alpha+$ $+\sin\beta$.

---

* Корни существенно различны, если $\alpha-\beta\neq 360°\cdot k$.

Решение. По условию α и β удовлетворяют данному уравнению, т. е.

$$a \sin\alpha + b\cos\alpha = c,$$
$$a\sin\beta + b\cos\beta = c. \qquad (*)$$

Вычитанием находим:

$$a(\sin\alpha - \sin\beta) + b(\cos\alpha - \cos\beta) = 0,$$

$$a\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - b\cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0,$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - b\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0.$$

Первый множитель отличен от нуля (потому что $\alpha - \beta \neq 360^\circ k$). Следовательно,

$$a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - b\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a}{b}.^{*}$$

Сложение равенств (*) дает:

$$a(\sin\alpha + \sin\beta) + b(\cos\alpha + \cos\beta) = 2c. \qquad (**)$$

С другой стороны, известно [см. формулы (VII. 1) и (VII. 3)]:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

т. е.

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{a}{b},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{b}{a}(\sin\alpha + \sin\beta).$$

---

* Если бы было $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, то следовало бы написать:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}.$$

Окончательный результат был бы тот же самый.

Подставим это в (**):

$$\left(a+\frac{b^2}{a}\right)(\sin\alpha+\sin\beta)=2c,$$

откуда

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{2ac}{a^2+b^2}.$$

79. Решить уравнение:

$$\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x).$$

Решение. $\sin(\pi\cos x)-\cos(\pi\sin x)=0$.

Применим формулу (VII. 12):

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cos x+\pi\sin x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cos x-\pi\sin x}{2}\right)=0.$$

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cos x+\pi\sin x}{2}\right)=0,$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(\cos x+\sin x)=\frac{\pi}{2}+n\pi,$$

$$\cos x+\sin x=2n+\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2n+\frac{1}{2}\quad \text{[формула (VII. 13)]},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\quad n+\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Возможные значения k определяются из неравенств:

$$-1<\sqrt{2}n+\frac{\sqrt{2}}{4}<1,$$

откуда

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}<n<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4},$$

приближенно

$$-0{,}96<n<0{,}46.$$

Таким образом, для n возможно только одно значение: $n=0$.

Поэтому

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}35355,$$

$$\frac{\pi}{4}+x=\pi k+(-1)^k \varphi,$$

$$x=\frac{\pi}{4}(4k-1)+(-1)^k \varphi,$$

где $\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}3614$,

или в градусной мере

$$x=45^\circ(4k-1)+(-1)^k\varphi, \text{ где } \varphi=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 20^\circ 42'.$$

2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(\cos x-\sin x)=\frac{\pi}{2}+n\pi,$

$$\cos x-\sin x=2n+\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=2n+\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sqrt{2}\,n+\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Как уже было выяснено, обязательно $n=0$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}35355,$$

$$\frac{\pi}{4}+x=2k\pi\pm\varphi,$$

$$x=\frac{\pi}{4}(8k-1)\pm\varphi, \text{ где } \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 1{,}2094,$$

или в градусной мере

$$x=45^\circ(8k-1)\pm\varphi, \text{ где } \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 69^\circ 18'.$$

Решить уравнения (№ 80—84).

80. $\sin\sin x=-0{,}8$. **81.** $\operatorname{tg} x^2=\operatorname{ctg} 5x$.

Решение. $\operatorname{tg} x^2-\operatorname{ctg} 5x=0$.

Преобразуем левую часть по формуле (VII. 18):

$$\frac{\cos(x^2+5x)}{\cos x^2\cdot\sin 5x}=0,$$

$$\cos(x^2+5x)=0,$$

$$x^2+5x=\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$2x^2+10x-\pi(2k+1)=0,$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+2\pi(2k+1)}}{2}.$$

Условие действительности:

$$25+2\pi(2k+1)\geqslant 0,$$

откуда

$$k\geqslant-\frac{1}{2}-\frac{25}{4\pi}\approx-2,5.$$

Таким образом, k может принимать значения:

$$k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots$$

82. $\sin\frac{5}{x}=\cos 3x.$

83. $\csc 2^x-\operatorname{ctg} 2^x=\sqrt{3}.$

84. $\sin x=\cos\sqrt{x}.$

85. Доказать, что уравнение $\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$ не имеет решений (действительных).

Решение. $\sin(\cos x)-\cos(\sin x)=0.$

Преобразуем левую часть по формуле (VII.12):

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right)=0.$$

$$1)\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x+\sin x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\cos x+\sin x=\frac{\pi}{2}(4k+1).$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\pi}{2}(4n+1).$$

Уже ясно, что это невозможно. Левая часть по абсолютной величине *не более* $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, а правая часть по абсолютной величине *не менее* $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

Аналогично доказывается невозможность равенства:

$$2)\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{2}\right) = 0.$$

86. Доказать, что уравнение $\sin(\sin x) = \cos(\cos x)$ не имеет решений (действительных).

87. Решить уравнение: $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Присоединим к данному уравнению тождество (XI. 9):

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

Сложением этих равенств находим:

$$\arccos x = \frac{\pi}{3},$$

откуда
$$x = \frac{1}{2}.$$

88. Решить уравнение: $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$.

89. Решить уравнение: $\arcsin 2x = 3 \arcsin x$.

Решение. Введем обозначения:

$$\arcsin 2x = \alpha, \text{ откуда } \sin\alpha = 2x,$$

$$\arcsin x = \beta, \text{ откуда } \sin\beta = x.$$

Данное уравнение запишется так:

$$\alpha = 3\beta.$$

Возьмем синус от обеих частей уравнения, используя при этом формулу для синуса тройного аргумента (V. 22):

$$2x = 3x - 4x^3, \quad x(4x^2 - 1) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Проверка обязательна, потому что, беря синусы от обеих частей уравнения, мы получаем уравнение, не равносильное данному. Проверка показывает, что все три решения удовлетворяют исходному уравнению.

Проверка была бы излишней, если бы мы предварительно установили область допустимых значений x:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 3\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{6},$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

90. Решить уравнение (найти x и n):

$$3\,\mathrm{arctg}\,(2+\sqrt{3}) - \mathrm{arctg}\,x = n\pi + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}.$$

91. Решить уравнение:

$$\mathrm{arctg}\,(x-1) + \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,(x+1) = \mathrm{arctg}\,3x.$$

92. Решить в целых числах уравнение:

$$\mathrm{arrtg}\,x + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{y} = \mathrm{arctg}\,3.$$

Решение. Возьмем тангенс от обеих частей уравнения:

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{1-\frac{x}{y}} = 3,$$

$$\frac{xy+1}{y-x} = 3,$$

$$y = \frac{1+3x}{3-x},$$

или, выделяя из неправильной алгебраической дроби целую часть,

$$y = -3 + \frac{10}{3-x}.$$

Теперь ясно, что целые решения могут получиться только в тех случаях, когда $3-x$ есть делитель числа 10, т. е. ± 1, ± 2, ± 5 и ± 10. Рассмотрим восемь случаев:

1) $3-x=1, \quad x=2, \quad y=7,$

2) $3-x=-1, \quad x=4, \quad y=-13,$

3) $3-x=2, \quad x=1, \quad y=2,$

4) $3-x=-2, \quad x=5, \quad y=-8,$

5) $3-x=5, \quad x=-2, \quad y=-1,$

6) $3-x=-5, \quad x=8, \quad y=-5,$

7) $3-x=10, \quad x=-7, \quad y=-2,$

8) $3-x=-10, \quad x=13, \quad y=-4.$

Проверка должна *только* подтвердить, что $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{y}$ заключено в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; в противном случае левая часть не может равняться никакому арктангенсу.

Прежде всего заметим, что если числа a и b имеют различные знаки, то сумма $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b$ обязательно заключена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, пусть, например, $a > 0$, $b < 0$. Тогда

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} b < 0, \end{cases}$$

откуда, складывая, получим:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}.$$

В силу этого замечания решения 2), 4), 6) и 8) годятся. Проверим остальные. Установим для каждого арктангенса, какой *восьмушке* он принадлежит:

1) $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{7} < \frac{\pi}{4},$

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} < \frac{3\pi}{4},$$

3) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

5) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-2) < -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$,

$$-\frac{3\pi}{4} < \operatorname{arctg}(-2) + \operatorname{arctg}(-1) < -\frac{\pi}{2},$$

7) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-7) < -\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$,

$$-\frac{3\pi}{4} < \operatorname{arctg}(-7) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) < -\frac{\pi}{4}.$$

Из этой проверки видно, что решение 3) подтверждается, а решение 5) неверно. Для решений 1) и 7) вопрос остался нерешенным. Чтобы его решить, следует установить более узкие границы для рассматриваемых арктангенсов, например от 0 до $\frac{\pi}{6}$, от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{3}$, от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$. Но и эти границы могут оказаться недостаточно узкими. Укажем два других способа, действующих безотказно.

Первый способ. Обратимся к таблицам:

1) $\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 0{,}14$, $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 1{,}25$,

7) $\operatorname{arctg}(-7) \approx -1{,}43$, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}56$,

$$\operatorname{arctg}(-7) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -1{,}99.$$

Таким образом, решение 1) верно, а решение 7) нет (вспомним, что $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$).

Проверка по таблицам может дать категорический результат лишь в тех случаях, когда проверяется *неравенство*. Если же требуется проверить точное равенство, то проверка по таблицам недостаточна.

Второй способ. Используем тождество: $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}$:

1) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \operatorname{arctg}\frac{1}{7} < \operatorname{arctg}\frac{1}{2},\end{array}\right\}$ следовательно, $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} < \frac{\pi}{2}$.

7) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \operatorname{arctg} 7 > \operatorname{arctg} 2,\end{array}\right\}$ следовательно, $\operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} > \frac{\pi}{2}$ или $\operatorname{arctg}(-7) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) < -\frac{\pi}{2}$.

Итак, из найденных восьми решений верными оказались шесть. Нумеруем их заново:

Ответ. $x_1 = 2$, $y_1 = 7$, $x_4 = 5$, $y_4 = -8$,
$x_2 = 4$, $y_2 = -13$, $x_5 = 8$, $y_5 = -5$,
$x_3 = 1$, $y_3 = 2$, $x_6 = 13$, $y_6 = -4$.

93. Решить при помощи тригонометрической подстановки уравнение $2x\sqrt{1 - x^2} = \cos t$.

Решение. Положим:

$$x = \sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Смысл ограничений для φ был разъяснен в решении задачи № 39. В силу этих ограничений

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos\varphi$$

(двойной знак не нужен, так как $\cos\varphi \geqslant 0$) и данное уравнение запишется так:

$$\sin 2\varphi = \cos t.$$

Далее

$$\sin 2\varphi - \cos t = 0,$$

$$-2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi + \frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi - \frac{t}{2}\right) = 0$$ [формула (VII. 12)].

Имеем две возможности:

$$\text{a)}\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi+\frac{t}{2}\right)=0,$$

$$\frac{\pi}{4}+\varphi+\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2},$$

$$x=\sin\varphi=\pm\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right),$$

$$\text{b)}\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi-\frac{t}{2}\right)=0.$$

Не повторяем выкладок, так как ясно, что разница только в знаке при t:

$$x=\pm\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$$

Проверка вносит дополнительное ограничение: знак x должен совпадать со знаком $\cos t$. Поэтому из двух знаков в полученных ответах в каждом данном случае должен выбираться только один, и всего получится два ответа.

Предостережем читателя от возможного недоразумения. Если, например, $\cos t$ отрицателен, то это не значит, что в полученных ответах следует взять знак — *перед синусом*, а значит, что из двух значений $\pm\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)$ следует выбрать отрицательное.

Пусть, например, $t=\frac{2\pi}{3}$, $\cos t=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)=\sin\frac{7\pi}{12}>0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)<0.$$

Следовательно, в этом случае ответы надо выбрать так:

$$x_1=-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right),\quad x_2=+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right).$$

Ответ. $x=\pm\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{t}{2}\right)$; знак x должен совпадать со знаком $\cos t$.

Решить при помощи тригонометрических подстановок уравнения (№ 94 и 95).

94. $2x=(1+x^2)\sin\alpha$.

95. $2x=(1-x^2)\operatorname{tg}\alpha$.

§ 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

93. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \sin^2 x-\sin^2 y=b. \end{cases}$$

Решение.

$$(\sin x+\sin y)(\sin x-\sin y)=b,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=b.$$

Группируя сомножители с одинаковыми аргументами, получим:

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=b,$$

но $x+y=\alpha$. Следовательно,

$$\sin(x-y)=\frac{b}{\sin\alpha},$$

откуда можно найти $x-y$:

$$x-y=k\pi+(-1)^k\varphi, \text{ где } \varphi=\arcsin\frac{b}{\sin\alpha}.$$

Ясно, что решение существует лишь при условии

$$|b|\leqslant|\sin\alpha|.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} x+y&=\alpha, \\ x-y&=k\pi+(-1)^k\varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha+k\pi}{2}+(-1)^k\dfrac{\varphi}{2}, \\ y=\dfrac{\alpha-k\pi}{2}-(-1)^k\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

В этих двух формулах k — одно и то же.

97. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\sin x \cdot \cos y = 0{,}36,\\ \cos x \cdot \sin y = 0{,}175.\end{cases}$$

Решение. Сложим и вычтем данные уравнения:

$$\sin(x+y) = 0{,}535,$$
$$\sin(x-y) = 0{,}185.$$

Откуда

$x + y = 180° k + (-1)^k \varphi$, где $\varphi = \arcsin 0{,}535 \approx 32° 21'$,

$x - y = 180° l + (-1)^l \psi$, где $\psi = \arcsin 0{,}185 \approx 10° 40'$,

$$x = 90° (k + l) + \frac{(-1)^k \varphi + (-1)^l \psi}{2},$$

$$y = 90° (k - l) + \frac{(-1)^k \varphi - (-1)^l \psi}{2}.$$

Эти ответы можно упростить. Разберем четыре случая:

1) $k = 2p$, $l = 2q$,
2) $k = 2p$, $l = 2q + 1$,
3) $k = 2p + 1$, $l = 2q$,
4) $k = 2p + 1$, $l = 2q + 1$.

Имеем соответственно:

1) $x = 90° (2p + 2q) + \frac{\varphi + \psi}{2}$, $y = 90°(2p - 2q) + \frac{\varphi - \psi}{2}$,

2) $x = 90° (2p + 2q + 1) + \frac{\varphi - \psi}{2}$,

$$y = 90° (2p - 2q - 1) + \frac{\varphi + \psi}{2},$$

3) $x = 90° (2p + 2q + 1) - \frac{\varphi - \psi}{2}$,

$$y = 90° (2p - 2q + 1) - \frac{\varphi + \psi}{2},$$

4) $x = 90° (2p + 2q + 2) - \frac{\varphi + \psi}{2}$,

$$y = 90° (2p - 2q) - \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Эти четыре случая можно записать экономнее, объединяя 1) с 4) и 2) с 3):

$$1)\ x = 90^\circ \cdot 2m \pm \frac{\varphi + \psi}{2},\quad y = 90^\circ \cdot 2n \pm \frac{\varphi - \psi}{2},$$

$$2)\ x = 90^\circ\,(2m + 1) \pm \frac{\varphi - \psi}{2},\quad y = 90^\circ\,(2n + 1) \pm \frac{\varphi + \psi}{2}.$$

В каждом случае знаки либо оба верхние, либо оба нижние.

Решить системы уравнений (№ 98 — 100).

98. $$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 3\,(\sin x + \sin y), \\ \cos 2x + \cos 2y = \cos x + \cos y. \end{cases}$$

99. $$\begin{cases} 2^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4, \\ 2^{2+\sin x} - 5 \cdot 3^{\sin y} = -2. \end{cases}$$

100. $$x + y + z = 180^\circ,$$
$$\sin x : \sin y : \sin z = 5 : 6 : \sqrt{13}.$$

Исключить x из системы уравнений (№ 101 — 103).

101. $\begin{cases} \sin x = a, \\ \sin 2x = b. \end{cases}$

102. $\begin{cases} \cos x + \sin x = a, \\ \cos 2x = b. \end{cases}$

103. $\begin{cases} x \cdot \sin x = m, \\ x \cdot \cos x = n. \end{cases}$

104. Исключить x и y из системы уравнений:

$$\sin x + \sin y = a,$$
$$\cos x + \cos y = b,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Преобразуем сначала третье уравнение:

$$\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{y}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},\qquad \frac{\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1}.$$

Образуем производную пропорцию по схеме: из $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ следует $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$,

$$\frac{-\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1},$$

или

$$\frac{\cos\frac{x+y}{2}}{\cos\frac{x-y}{2}}=\cos\alpha. \qquad (*)$$

Теперь возведем каждое из первых двух уравнений в квадрат и сложим:

$$2+2\cos(x-y)=a^2+b^2,$$

$$1+\cos(x-y)=\frac{a^2+b^2}{2},$$

$$2\cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}. \qquad (**)$$

Перемножим (*) и (**):

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}\cos\alpha.$$

Левая часть этого равенства тождественно равна левой части второго из данных уравнений. Следовательно,

$$(a^2+b^2)\cos\alpha=2b.$$

105. Исключить x и y из системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\alpha,\\ \sin x\cdot\sin y=a,\\ \cos x\cdot\cos y=b.\end{cases}$$

§ 6. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ И СВЕРТЫВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

106. Суммировать:

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\sin(\alpha+2h)+\ldots+\sin(\alpha+nh).$$

Решение. Первый способ. Для суммирования конечного ряда

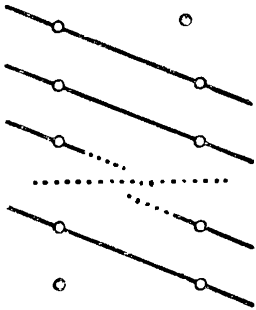
$$s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$$

иногда удается применить следующий способ. Подберем так называемую *производящую функцию*, т. е. функцию, обладающую следующим свойством:

$$f(k+1)-f(k)=u_k.$$

Придавая k последовательно значения $1, 2, 3, \ldots, n$, получим:

$$\begin{aligned} f(2)-f(1)&=u_1,\\ f(3)-f(2)&=u_2,\\ f(4)-f(3)&=u_3,\\ &\ldots\ldots\\ f(n)-f(n-1)&=u_{n-1},\\ f(n+1)-f(n)&=u_n. \end{aligned}$$



Сложим эти равенства. В левых частях некоторые члены взаимно уничтожатся (как показано на схеме), а в правой части получится искомая сумма:

$$f(n+1)-f(1)=s_n.$$

При решении разных задач встречаются многочисленные модификации приведенного хода выкладок.

В данной задаче можно исходить из формулы

$$\cos\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right)=$$

$$=-2\sin(\alpha+kh)\cdot\sin\frac{h}{2}.$$

Придавая k значения 0, 1, 2, . . ., n, получим:

$$\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)=-2\sin\alpha\cdot\sin\frac{h}{2},$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)=-2\sin(\alpha+h)\cdot\sin\frac{h}{2},$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{5h}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)=-2\sin(\alpha+2h)\cdot\sin\frac{h}{2},$$

. . . .

$$\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2n-1}{2}\right)=$$

$$=-2\sin(\alpha+nh)\cdot\sin\frac{h}{2}.$$

Сложим эти равенства:

$$\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)=-2s_n\cdot\sin\frac{h}{2},$$

где через s_n обозначена искомая сумма. Левую часть преобразуем в произведение:

$$-2\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}h=-2s_n\cdot\sin\frac{h}{2},$$

откуда

$$s_n=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Второй способ. При суммировании синусов или косинусов, аргументы которых образуют арифметическую прогрессию, можно использовать тот факт, что каждый синус или косинус входит в состав показательной функции:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Вместо того, чтобы суммировать данные синусы или косинусы, можно суммировать соответствующие показательные функции. Они образуют геометрическую прогрессию. От полученной суммы следует отобрать действительную часть, если требуется найти сумму косинусов, или мнимую часть*, если требуется найти сумму синусов.

В данной задаче следует рассмотреть геометрическую прогрессию:

$$e^{i\alpha}+e^{i(\alpha+h)}+e^{i(\alpha+2h)}+\ldots+e^{i(\alpha+nh)}, \qquad (*)$$

знаменатель которой $q=e^{ih}$. Сумма геометрической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q},$$

где n — число членов. В прогрессии $(*)$ число членов равно $n+1$. Следовательно,

$$S_n=\frac{e^{i\alpha}\left[1-e^{i(n+1)h}\right]}{1-e^{ih}}.$$

Следует преобразовать S_n к виду $A+iB$ (A и B действительны). Укажем на один удобный способ преобразования выражения вида $1\pm e^{i\varphi}$. Это выражение следует умножить и разделить на $e^{-\frac{i\varphi}{2}}$:

$$1+e^{i\varphi}=\frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}+e^{\frac{i\varphi}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}},$$

$$1-e^{i\varphi}=\frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}-e^{\frac{i\varphi}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}}.$$

Теперь используем формулы Эйлера (XIII. 4) и (XIII. 5):

$$e^{-ix}+e^{ix}=2\cos x,$$

$$e^{-ix}-e^{ix}=-2i\cdot\sin x.$$

* «Мнимой частью» называется коэффициент при i.

Подставим это в выражения для $1 \pm e^{i\varphi}$:

$$\left.\begin{aligned} 1 + e^{i\varphi} &= 2e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos\frac{\varphi}{2}, \\ 1 - e^{i\varphi} &= -2i \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Вернемся к выражению для S_n:

$$S_n = \frac{e^{i\alpha}(-2i)e^{\frac{i(n+1)h}{2}} \sin\frac{(n+1)h}{2}}{e^{\frac{ih}{2}}(-2i)\sin\frac{h}{2}} =$$

$$= e^{i\left(\alpha + \frac{nh}{2}\right)} \frac{\sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\left[\cos\left(\alpha + \frac{nh}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\alpha + \frac{nh}{2}\right)\right] \cdot \sin\frac{(n+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}. \tag{**}$$

Ряд (*), сумму которого мы нашли, может быть записан так:

$$[\cos\alpha + i\sin\alpha] + [\cos(\alpha + h) + i\sin(\alpha + h)] + \ldots$$
$$\ldots + [\cos(\alpha + nh) + i\sin(\alpha + nh)]. \tag{*}$$

Приравнивая отдельно действительные и мнимые части выражений (*) и (**), получим:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h) + \ldots + \cos(\alpha + nh) =$$
$$= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{nh}{2}\right) \cdot \sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}},$$

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h) + \ldots + \sin(\alpha + nh) =$$
$$= \frac{\sin\left(\alpha + \frac{nh}{2}\right) \cdot \sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Примечание. Полученные решения теряют силу при $\sin\frac{h}{2} = 0$, т. е. $h = 2k\pi$. В этом случае возможны два способа суммирования.

Первый способ — непосредственное обращение к данной сумме. Все члены этой суммы при $h=2k\pi$ одинаковы, и мы получаем:

$$\sin\alpha+\sin\alpha+\ldots+\sin\alpha=(n+1)\sin\alpha.$$

Второй способ — предельный переход в общей формуле. Этот способ сложнее, но он поучителен. Обозначая

$$h-2k\pi=t,\quad h=2k\pi+t,$$

получим:

$$\lim_{h\to 2k\pi}\frac{\sin\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\cdot\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left[\alpha+\frac{n(t+2k\pi)}{2}\right]\sin\frac{(n+1)(t+2k\pi)}{2}}{\sin\left(k\pi+\frac{t}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(nk\pi+\alpha+\frac{nt}{2}\right)\cdot\sin\left[(n+1)k\pi+\frac{(n+1)t}{2}\right]}{\sin\left(k\pi+\frac{t}{2}\right)}=\ldots$$

Заметим, что

$$\sin(m\pi+x)=(-1)^m\sin x$$

$$\ldots=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^{nk}\sin\left(\alpha+\frac{nt}{2}\right)(-1)^{(n+1)k}\sin\frac{(n+1)t}{2}}{(-1)^k\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\sin\left(\alpha+\frac{nt}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]=\ldots$$

Предел второго множителя в квадратных скобках таков:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=(n+1)^*.$$

* Способ для нахождения таких пределов показан в решении задачи № 139.

Поэтому окончательно получим:

$$\lim_{t\to 0}\left[\sin\left(\alpha+\frac{nt}{2}\right)\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]=(n+1)\cdot\sin\alpha.$$

107. Суммировать:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha.$$

Решение. Эта задача может быть решена теми же способами, что и предыдущая. Кроме того, можно сразу получить ответ, рассматривая ее как частный случай предыдущей. Для этого надо в предыдущей задаче положить $\alpha=0$, а букву h заменить на α. Получим:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

О случае, когда $\sin\frac{\alpha}{2}=0$, см. примечание к решению предыдущей задачи.

108. Решить уравнение:

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx.$$

109. Суммировать:

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{2}\right].$$

110. Суммировать:

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\cdot\sin 4\alpha+\ldots$$
$$\ldots+\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha.$$

Решение. Каждый член ряда преобразуем при помощи формулы (VIII. 2):

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha&=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 3\alpha),\\ \sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha&=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 5\alpha),\end{aligned}\right\}\quad(*)$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 3\alpha\cdot\sin 4\alpha &= \frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos 7\alpha),\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha &= \frac{1}{2}\Big[\cos\alpha-\cos(2n+1)\alpha\Big].\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

Заметим, что

$$\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\ldots+\cos(2n+1)\alpha=$$

$$=\frac{\cos(n+2)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}$$

(это легко получить любым из способов, изложенных в решении задачи 106). Сложим равенства (*):

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\sin 3\alpha+\sin 3\alpha\cdot\sin 4\alpha+\ldots$$

$$\ldots+\sin n\alpha\cdot\sin(n+1)\alpha=\frac{1}{2}\left[n\cdot\cos\alpha-\frac{\cos(n+2)\alpha\cdot\sin n\alpha}{\sin\alpha}\right].$$

111. Найти частную сумму ряда:

$$\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}+\ldots$$

Доказать, что этот ряд сходится, и найти его полную сумму.

Решение. Будем исходить из следующего легко доказываемого тождества [формула (VII 20)]:

$$\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}x-2\operatorname{ctg}2x.$$

Преобразуем по этой формуле члены данного ряда:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha,$$

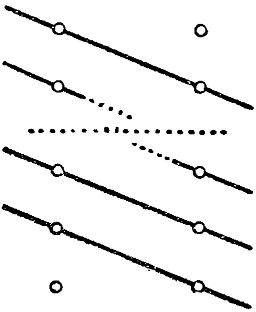
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Складывая эти равенства и замечая, что некоторые члены взаимно уничтожаются, как показано на схеме, получим:



$$s_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n} - 2\operatorname{ctg} 2\alpha. \qquad (*)$$

Формула (*) требует двух оговорок. Во-первых, $\alpha \neq (2k+1)\,2^{m-1}\pi$ (k — произвольное целое, $m = 1, 2, 3, \ldots, n$). При несоблюдении этого условия член ряда, имеющий номер m, лишился бы смысла. Во-вторых, $\alpha \neq 0$, потому что при $\alpha = 0$ тождества, при помощи которых мы преобразовывали члены ряда, теряют силу.

При $n \to \infty$ первый член правой части формулы представляет неопределенность вида $0\cdot\infty$. Эта неопределенность раскрывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{1}{\alpha},$$

потому что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$; в данном случае $x = \frac{\alpha}{2^n}$.

Отсюда следует, что данный ряд сходится и его полная сумма такова:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{\alpha} - 2\operatorname{ctg} 2\alpha$$

[$\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq (2k+1)\,2^n\pi$, где k — любое целое, а n — любое натуральное].

112. Суммировать:

$$\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13}.$$

Решение. Эта задача может быть решена теми же двумя способами, что и задача № 106. Не повторяя их, укажем третий способ. Числа, фигурирующие в условии этой задачи, возникают при извлечении корня тринадцатой степени из -1. Обозначим $z=\sqrt[13]{-1}$. По известной формуле для извлечения корня из комплексного числа

$$z=\sqrt[13]{-1}=\sqrt[13]{\cos\pi+i\sin\pi}=$$

$$=\cos\frac{\pi+2k\pi}{13}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{13}.$$

$\sqrt[13]{-1}$ имеет тринадцать различных значений; они получаются из последней формулы при $k=0, 1, 2, \ldots, 12$:

$$z_0=\cos\frac{\pi}{13}+i\cdot\sin\frac{\pi}{13},$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{13}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{13},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{13}+i\cdot\sin\frac{5\pi}{13},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{12}=\cos\frac{25\pi}{13}+i\cdot\sin\frac{25\pi}{13}.$$

Известно, что сумма всех значений $\sqrt[n]{a}$ равна нулю:

$$z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{12}=0.$$

Следовательно, и сумма действительных частей от этих чисел равна нулю:

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}+$$

$$+\cos\pi+\cos\frac{15\pi}{13}+\cos\frac{17\pi}{13}+\cos\frac{19\pi}{13}+\cos\frac{21\pi}{13}+$$

$$+\cos\frac{23\pi}{13}+\cos\frac{25\pi}{13}=0. \qquad (*)$$

Теперь заметим, что члены, равноудаленные от концов, равны между собой. В самом деле,

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos(\pi-\alpha).$$

Придавая в этом тождестве α значения $\frac{2\pi}{13}, \frac{4\pi}{13}, \ldots,$ $\frac{12\pi}{13}$, получим:

$$\cos\frac{15\pi}{13} = \cos\frac{11\pi}{13},$$

$$\cos\frac{17\pi}{13} = \cos\frac{9\pi}{13},$$

$$\cos\frac{19\pi}{13} = \cos\frac{7\pi}{13},$$

$$\cos\frac{21\pi}{13} = \cos\frac{5\pi}{13},$$

$$\cos\frac{23\pi}{13} = \cos\frac{3\pi}{13},$$

$$\cos\frac{25\pi}{13} = \cos\frac{\pi}{13}.$$

Учитывая эти равенства, можно переписать равенство (*) так:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13}\right) - 1 = 0,$$

откуда

$$\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}.$$

113. Суммировать:

$$\cos\frac{\pi}{k} + \cos\frac{2\pi}{k} + \cos\frac{3\pi}{k} + \ldots + \cos\frac{n\pi}{k}.$$

114. Доказать:

$$\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 5 + \ldots + \operatorname{arcctg}(2n+1) =$$
$$= \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n} - \frac{\pi n}{4}.$$

Р е ш е н и е. Заменим арккотангенсы в левой части доказываемого тождества арктангенсами по формуле:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\\ \text{при условии } x > 0\end{array}\right\}$$

и запишем это тождество так:

$$\left(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{\pi n}{4}. \qquad (**)$$

По формуле (XI. 32): (в данном случае $x > 0$ и $y > 0$, так что условие $xy > -1$ гарантировано):

$$\operatorname{arctg}\frac{k+1}{k} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2k+1} = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{k+1}{k} - \dfrac{1}{2k+1}}{1 + \dfrac{k+1}{k(2k+1)}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2k^2 + 2k + 1}{2k^2 + 2k + 1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, каждая из скобок в левой части равенства (**) равна $\frac{\pi}{4}$, а число скобок равно n. Тождество доказано.

* **115.** Свернуть произведение:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ \ldots \ \cdot \cos 2^{n-1}\alpha.$$

* **116.** Найти предел произведения:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\ \ldots$$

§ 7. ГРАФИКИ

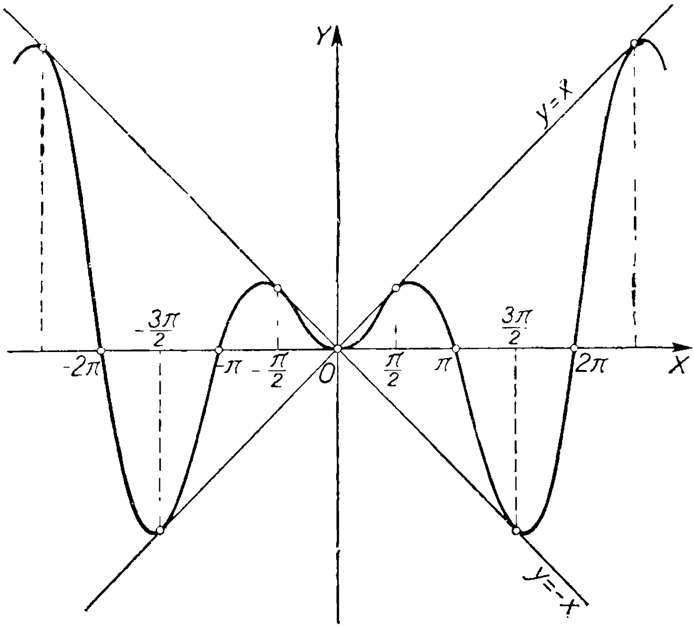
Построить графики (№ 117 и 118).

117. 1) $y = |\sin x|$, 2) $y = |\cos x|$.

118. 1) $y = x + \sin x$, 2) $y = x + \cos x$.

119. Построить график $y = x \cdot \sin x$.

Решение. $\sin x$ возрастает от -1 до 1, затем убывает от 1 до -1 и т. д. Когда $\sin x = 1$ [т. е. при $x = \frac{\pi}{2}(4k+1)$], ордината данной линии совпадает с ординатой прямой $y = x$ (черт. 8). Когда $\sin x = -1$



Черт. 8

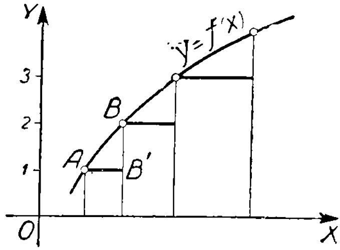
[т. е. при $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$], ордината данной линии совпадает с ординатой прямой $y = -x$. Данная линия пересекает ось X в тех же точках, что и синусоида $y = \sin x$. Заметим еще, что функция $y = x \cdot \sin x$ — четная и, следовательно, ее график симметричен относительно оси Y.

120. Построить график $y = E(2 \sin x)$*.

---

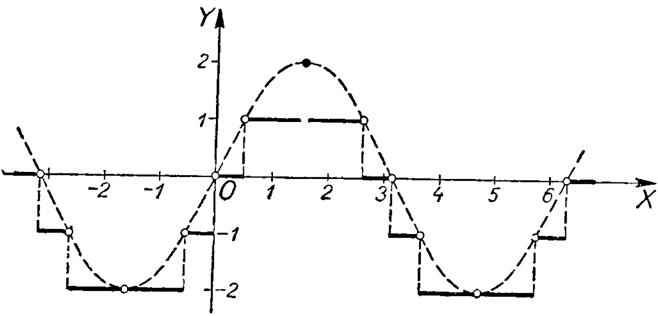
* Функция $E(x)$ определяется так: если $n \leqslant x < n+1$ (n — целое), то $E(x) = n$. Другими словами, если x не есть целое число, то $E(x)$ равна ближайшему целому числу, которое левее x (на числовой оси); если же x — целое число, то $E(x) = x$. Функция $E(x)$ называется «целая часть x». E — начальная буква французского слова entier — целый.

Решение. Пусть вычерчен график функции $y=f(x)$ (черт. 9). Чтобы получить график функции $y=E[f(x)]$, надо каждую ординату графика $y=f(x)$ «округлить» до ближайшего меньшего (точнее, не большего) целого числа. Для этого проводим прямые $y=-2$, $y=-1$, $y=0$, $y=1$ ... График $y=f(x)$ делится этими прямыми на дуги. Берем каждую дугу, высеченную прямыми $y=n$ и $y=n+1$, и проектируем ее на нижнюю из этих прямых, причем концы дуг оставляем на своих местах. Например, дуга AB на чертеже 9 заменяется полуинтервалом $[AB')$.



Черт. 9

Применяя описанный прием к линии $y=2\sin x$ (на черт. 10 показана пунктиром), получим график функции $y=E(2\sin x)$.



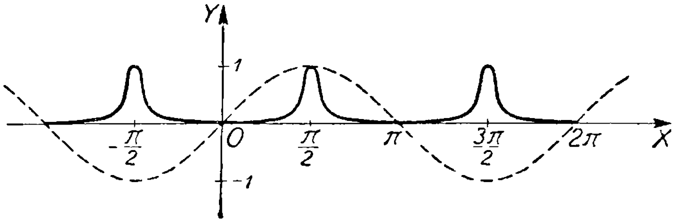
Черт. 10

121. Построить графики функций:

1) $y=\sin^n x$ при очень большом четном n,

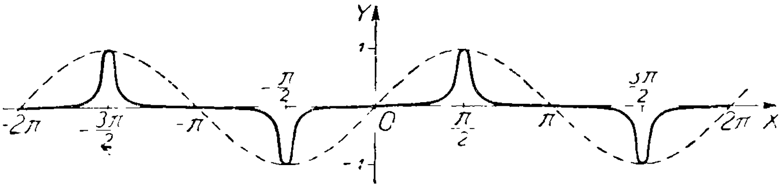
2) $y=\sin^n x$ » » » нечетном n.

Решение. Рассмотрим синусоиду $y=\sin x$ (на черт. 11 изображена пунктиром). При возведении в степень n (n — очень большое) каждая ордината, для которой $0<|y|<1$, значительно уменьшится по модулю. Ординаты, для которых $|y|=1$ или $y=0$, по модулю не изменяются. Если n — нечетное, то $\sin^n x$ имеет тот же знак, что и $\sin x$, т. е. расположение полуволн кривой $y=\sin^n x$ такое же, как у синусоиды $y=\sin x$ (черт. 12). Если же n — четное, то $\sin^n x \geqslant 0$ (черт. 11). В точках, где $\sin x=0$, кривая



Черт. 11

касается оси X, потому что при бесконечно малом x (это относится к окрестности начала координат; в других точ-



Черт. 12

ках пересечения с осью X дело обстоит аналогично) $\sin x$ является бесконечно малой того же порядка, что и x, а $\sin^n x$ $(n \geqslant 2)$ — бесконечно малой высшего порядка.

Построить графики функций (№ 122 — 125).

122. $y=\sqrt{\sin x}.$

123. $y=\sqrt[n]{\sin x}$, где n — очень большое четное число.

124. $y=\lg \sin x.$

125. $y=\sqrt{\lg \sin x}.$

§ 8. НЕРАВЕНСТВА

126. Доказать неравенства: $-\sqrt{2} \leqslant \sin\alpha+\cos\alpha \leqslant \sqrt{2}.$

127. Доказать: если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\quad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, то $\sin(\alpha+\beta+\gamma)<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$

Решение. Будем исходить из формулы (IV. 9):

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$$

Во-первых, отбросим последний член в правой части. От этого правая часть увеличится (все сомножители положительны).

Во-вторых, заменим все косинусы единицами (как видно из условия, каждый косинус строго меньше единицы). От этого правая часть увеличится.

Итак, при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)<\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

128. Решить неравенство: $\sin x+\cos x>0$.

Решение. Преобразуем левую часть в произведение [формула (VII. 13)]; множитель $\sqrt{2}$ сокращается:

$$\sin(45^\circ+x)>0,$$

откуда

$$360^\circ k<45^\circ+x<360^\circ k+180^\circ,$$

$$360^\circ k-45^\circ<x<360^\circ k+135^\circ,$$

$$45^\circ(8k-1)<x<45^\circ(8k+3).$$

129. Решить неравенство: $5\sin^2 x+3\sin x-1<0$.

130. Определить значения $\alpha\,(0\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ)$, при которых квадратное уравнение относительно z

$$2z^2\cos^2\alpha-4z\cos\alpha+4\cos^2\alpha-1=0$$

имеет действительные корни. Определить знаки этих корней.

Решение. Вычислим дискриминант данного квадратного трехчлена:

$$D=(2\cos\alpha)^2-2\cos^2\alpha\,(4\cos^2\alpha-1)=2\cos^2\alpha\,(3-4\cos^2\alpha).$$

Корни уравнения действительны и различны, если $D>0$. Это приводит к условиям:

$$3-4\cos^2\alpha>0,\quad \cos\alpha\neq 0.$$

Условие $\cos\alpha \neq 0$ должно соблюдаться во всяком случае (а не только для того, чтобы корни были действительны и различны), так как при $\cos\alpha = 0$ данное уравнение принимает вид: $-1 = 0$.

Итак,
$$\cos^2\alpha < \frac{3}{4}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
$$|\cos\alpha| < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
$$30^\circ < \alpha < 150^\circ, \quad \alpha \neq 90^\circ.$$

Допустим, что корни действительны, и исследуем, при каком условии они разных знаков. Для этого свободный член должен быть отрицателен (поскольку старший коэффициент данного уравнения положителен):
$$4\cos^2\alpha - 1 < 0, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
$$\cos^2\alpha < \frac{1}{4}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
$$|\cos\alpha| < \frac{1}{2}, \quad \cos\alpha \neq 0,$$
откуда
$$60^\circ < \alpha < 120^\circ, \quad \alpha \neq 90^\circ.$$

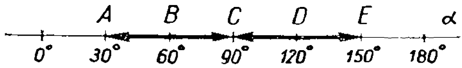
Констатируем, что этот интервал находится внутри интервала $(30^\circ, 150^\circ)$, в котором корни действительны. В остальной части интервала $(30^\circ, 150^\circ)$ корни имеют одинаковые знаки. Выясним, какие именно. Сумма корней такова:
$$z_1 + z_2 = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

В интервале $(30^\circ, 60^\circ)$ $\cos\alpha > 0$ и оба корня положительны. В интервале $(120^\circ, 150^\circ)$ $\cos\alpha < 0$ и оба корня отрицательны.

Результаты этого исследования представим графически (черт. 13). Жирным показаны интервалы (значений α), в которых корни (z_1 и z_2) действительны и различны.

В интервале AB оба корня положительны.

В интервалах BC и CD корни имеют разные знаки. При переходе α через точку C корни обмениваются знаками. В самой точке C уравнение теряет смысл.



Черт. 13

В интервале DE оба корня отрицательны.
В точках B и D один из корней обращается в нуль.
В точках A и E корни действительные совпадающие.

§ 9. ПОВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

131. Какие из следующих функций являются периодическими и каков их период?

$$1)\ \sin 3x,\quad 2)\ \cos\frac{2x}{5},\quad 3)\ \cos\pi x,\quad 4)\ \cos^2 x,\quad 5)\ \sin^3 x,$$
$$6)\ \sin x^2,\quad 7)\ \cos\sqrt{x}.$$

Решение. Непосредственно ясно, что первые три функции периодические. Их периоды соответственно:

$$T_1=\frac{2\pi}{3},\quad T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{5}}=5\pi,\quad T_3=\frac{2\pi}{\pi}=2.$$

Четвертая и пятая функции тоже периодические. В этом можно убедиться из формул (IX.1) и (IX.15):

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x;\quad T_4=\frac{2\pi}{2}=\pi,$$
$$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x;\quad T_5=2\pi.$$

В самом деле, первый член $\left(\frac{3}{4}\sin x\right)$ имеет период 2π. Второй член $\left(-\frac{1}{4}\sin 3x\right)$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, но всякое кратное этого числа, т. е. $\frac{2k\pi}{3}$, тоже служит периодом.

Таким образом, 2π есть *общий* (и притом *наименьший* общий) период этих обоих членов.

Шестая и седьмая функции не периодичны. Покажем на примере шестой функции, как это доказать.

Допустим, что функция $f(x) = \sin x^2$ — периодическая. Это значит следующее: существует число T, отличное от нуля и не зависящее от x, для которого удовлетворяется равенство:

$$f(x+T) = f(x).$$

Это равенство тождественно относительно x. Для данной функции

$$\sin x^2 = \sin (x+T)^2,$$

$$-2\sin\left(\frac{T^2}{2}+xT\right)\cos\left(\frac{T^2}{2}+xT+x^2\right) = 0,$$

откуда

либо $\frac{T^2}{2}+xT = k\pi$, либо $\frac{T^2}{2}+xT+x^2 = \frac{\pi}{2}+k\pi$.

Эти равенства не определяют числа T, удовлетворяющего перечисленным условиям ($T \neq 0$, T не зависит от x).

132. Исследовать на возрастание и убывание функцию:

$$y = 6\cos^2 x - 5\cos x + 1.$$

Решение. Запишем данную функцию при помощи цепочки:

$$y = 6z^2 - 5z + 1, \quad z = \cos x.$$

Сформулируем несколько положений, которые бывают полезны при исследовании поведения функций:

1. *Любая функция от периодической функции — периодическая (с тем же периодом).*

Поэтому y является периодической функцией от x с периодом 360°. Учитывая это, мы ограничимся исследованием данной функции на отрезке [0; 360°].

2. *Монотонная функция от монотонной функции — монотонная.* Подробнее:

возрастающая от возрастающей — возрастающая,

возрастающая от убывающей — убывающая,

убывающая от возрастающей — убывающая,
убывающая от убывающей — возрастающая.

Таким образом, если имеем сложную функцию $y[z(x)]$, то изменение ее поведения (переход от возрастания к убыванию или от убывания к возрастанию) может происходить в следующих точках:

1) если x — граница интервалов монотонности $z(x)$,

2) если $z(x)$ — граница интервалов монотонности $y(z)$.

Если при некотором x одновременно выполняются условия 1) и 2), то это значение x не есть граница интервалов монотонности $y[z(x)]$.

Наконец, отметим следующее положение, хорошо известное из школьного курса алгебры:

3. *Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет экстремум при $x=-\frac{b}{2a}$. Если $a>0$, то*

$$\text{при } -\infty < x < -\frac{b}{2a} \text{ трехчлен убывает,}$$

$$\text{при } -\frac{b}{2a} < x < \infty \quad \text{»} \quad \text{возрастает.}$$

Если $a<0$, то дгло обстоит наоборот.

В данной задаче квадратный трехчлен

$$y=6z^2-5z+1$$

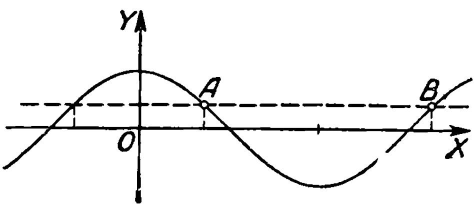
имеет минимум при

$$z=\frac{5}{12}\approx 0{,}41667.$$

Обозначим:

$$\varphi=\arccos\frac{5}{12}\approx 65^\circ\,23'.$$

Для наглядности обратимся к следующему чертежу, на котором изображена косинусоида $z=\cos x$ (черт. 14).



Черт. 14

На этом чертеже изображена (пунктиром) прямая $y = \frac{5}{12}$. Она пересекает косинусоиду в точках, для которых $\cos x = \frac{5}{12}$.

Для точки A $x = \varphi \approx 65^\circ 23'$.

Для точки B $x = 360^\circ - \varphi \approx 294^\circ 37'$.

Для всех точек, лежащих *ниже* пунктирной прямой, $z < \frac{5}{12}$ и, следовательно, $y(z) = 6z^2 - 5z + 1$ *убывает*.

Для всех точек, лежащих *выше* пунктирной прямой, $z > \frac{5}{12}$ и, следовательно, $y(z) = 6z^2 - 5z + 1$ *возрастает*.

Теперь ясно:

Интервал	$y(z)$	$z(x) = \cos x$	$y[z(x)]$
$(0, \varphi)$	возрастает	убывает	убывает
$(\varphi, 180^\circ)$	убывает	убывает	возрастает
$(180^\circ, 360^\circ - \varphi)$	убывает	возрастает	убывает
$(360^\circ - \varphi, 360^\circ)$	возрастает	возрастает	возрастает

Полезно еще вычислить значения $y[z(x)]$ на границах интервалов монотонности:

при $x = 0$, $z = 1$, $y = 2$,

$x = \varphi$, $z = \frac{5}{12}$, $y = -\frac{1}{24}$,

$x = 180^\circ$, $z = -1$, $y = 12$,

$x = 360^\circ - \varphi$, $z = \frac{5}{12}$, $y = -\frac{1}{24}$,

$x = 360^\circ$, $z = 1$, $y = 2$.

Теперь окончательный ответ может быть сформулирован так:

при $0 < x < \varphi$ y убывает от 2 до $-\frac{1}{24}$,

» $\varphi < x < 180^\circ$ » возрастает » $-\frac{1}{24}$ » 12, при $180° < x < 360° - \varphi$ y убывает от 12 до $-\frac{1}{24}$,

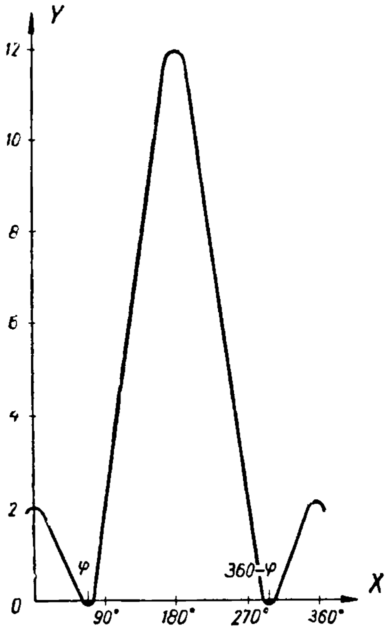
» $360° - \varphi < x < 360°$ » возрастает » $-\frac{1}{24}$ » 2.

В заключение даем график функции $y = 6\cos^2 x - 5\cos x + 1$ (черт. 15).

Примечание. Читателю могут показаться противоречивыми утверждения, что на интервале $(0, \varphi)$ $y(z)$ возрастает, а $y[z(x)]$ убывает. Разве $y(z)$ и $y[z(x)]$ не есть одна и та же функция?

Под $y(z)$ мы понимаем функцию $y(z) = 6z^2 - 5z + 1$, где z — *независимое переменное*. Утверждение, что $y(z)$ возрастает, подробнее формулируется так: если z возрастает, то и $y(z)$ возрастает, а если z убывает, то и $y(z)$ убывает. При этом мы не утверждаем, что z обязательно возрастает (или убывает), поскольку z — *независимое переменное*.

Под $y[z(x)]$ мы понимаем функцию $y = 6\cos^2 x - 5\cos x + 1$, где x — *независимое переменное*. Если x возрастает от 0 до φ, то $z = \cos x$ *обязательно* убывает, а, следовательно, $y[z(x)]$ тоже убывает.



Черт. 15

Короче говоря, утверждение «$y(z)$ возрастает», значит, возрастанию z соответствует возрастание y». Утверждение же «$y[z(x)]$ «убывает», значит, «возрастанию x соответствует убывание y». Эти утверждения не противоречат одно другому.

133. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = 2\sin^2 x + 8\sin x + 3.$$

134. Доказать, что при возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y = x - \sin x$ возрастает.

Решение. Если $y(x) = x - \sin x$, то $y(x+h) = x + h - \sin(x+h)$. Следовательно,

$$y(x+h)-y(x)=h-\sin(x+h)+\sin x=$$
$$=h-2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=2\left[\frac{h}{2}-\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right].$$

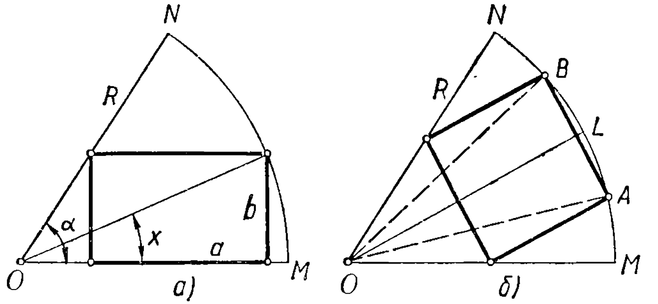
Если x и $x+h$ принадлежат интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $h>0$, то выражение в квадратных скобках положительно, потому что

$$\frac{h}{2}>\sin\frac{h}{2}, \quad \text{а} \quad \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)<1.$$

Итак, при $h>0$ $y(x+h)>y(x)$, т. е. $y(x)$ возрастает.

135. Доказать, что при возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ функция $y=\frac{\sin x}{x}$ убывает.

136. В данный круговой сектор вписать прямоугольник наибольшей площади (угол сектора $\leqslant 90°$).



Черт. 16

Решение. Прямоугольник может быть вписан в сектор двумя способами [черт. 16 *а*) и *б*)]. Рассмотрим способ а). Имеем:

$$b=R\sin x,$$

$$a=R\cos x-b\operatorname{ctg}\alpha=R(\cos x-\sin x\cdot\operatorname{ctg}\alpha)=$$
$$=R\frac{\cos x\cdot\sin\alpha-\sin x\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{R\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha},$$

$$S=ab=R^2\frac{\sin x\cdot\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha}=R^2\frac{\cos(2x-\alpha)-\cos\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Наибольшее значение S достигается при $\cos(2x - \alpha) = 1$, откуда

$$2x - \alpha = 0,$$

$$x = \frac{\alpha}{2}.$$

Это наибольшее значение таково:

$$S_{\max} = R^2 \frac{1 - \cos\alpha}{2\sin\alpha} = R^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

В случае б) проведем биссектрису OL угла α. Тогда прямоугольник разделится этой биссектрисой на два прямоугольника. Каждый из них вписан в *половинный сектор* по способу а), и поэтому задача сводится к предыдущему случаю: OB должно быть биссектрисой угла LON, т. е.

$$\angle LOB = \frac{\alpha}{4}, \quad \angle AOB = \frac{\alpha}{2}.$$

Обозначим через $S'_{\max}$ наибольшее значение площади прямоугольника, вписанного по способу б). Очевидно,

$$S'_{\max} = 2R^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$

Теперь надо выяснить, какое из двух чисел ($S_{\max}$ или $S'_{\max}$) больше. Рассмотрим разность:

$$S_{\max} - S'_{\max} = R^2\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= R^2\left(\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}} - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right) = R^2\frac{2\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{4}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}}.$$

По условию $0 < \alpha < 90^\circ$. Следовательно,

$$0 < \frac{\alpha}{4} < 22^\circ 30', \quad 0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} < 1.$$

Таким образом, $S_{\max} - S'_{\max} > 0$, т. е. прямоугольник наибольшей площади получится при способе а).

137. Даны основание a треугольника и сумма m двух других сторон. Определить наибольшее возможное значение угла A.

§ 10. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Найти пределы (№ 138—144).

138. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

Решение. $$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}}{2\frac{x-\alpha}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\quad\lim_{x\to\alpha}\cos\frac{x+\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

В задачах этого параграфа мы постоянно будем пытаться преобразовать данное выражение так, чтобы получился предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$. Мы предполагаем известным, что этот предел равен единице.

139. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение. $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}.$$

140. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}$.

141. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

142. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos mx}$.

143. $\lim\limits_{x\to1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right]$.

Решение. Обозначим $1-x=z$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]=\lim_{z\to0}\left[z\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(1-z)}{2}\right]=$$

$$= \lim_{z \to 0} \left[z \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2} \right) \right] = \lim_{z \to 0} z \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin \frac{\pi z}{2}} \cdot \lim_{z \to 0} \cos \frac{\pi z}{2} = \frac{2}{\pi} \lim_{z \to 0} \frac{\frac{\pi z}{2}}{\sin \frac{\pi z}{2}} \lim_{z \to 0} \cos \frac{\pi z}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

144. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{x} \right)$.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ ТАБЛИЦ

145. Вычислить по таблицам:

1) $\sin \lg 3$.

Решение. $\sin \lg 3 = \sin 0{,}47712 = 0{,}45922$.

2) $\sin \sin 1$.

3) $\cos \cos \cos 0{,}5$.

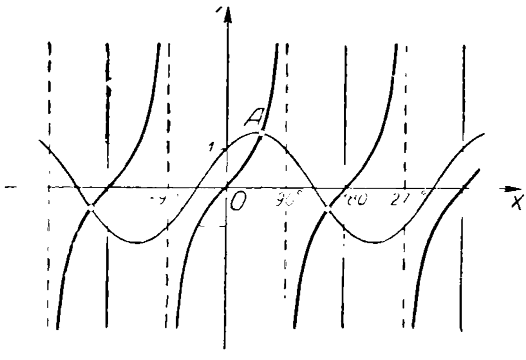
4) $\operatorname{ctg} \sqrt[3]{2{,}5}$.

146. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения:

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x.$$

Решение. Прежде всего определим графически, в каком интервале расположен искомый корень. Построим графики $y = \sin x + \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$ (черт. 17). При построении первого графика преобразуем:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin (45^\circ + x).$$



Черт. 17

Наименьший положительный корень — это абсцисса точки A. Из чертежа ясно, что он заключен между 45° и 90°. Если чертеж выполнен более или менее тщательно, то видно, что

$$50^\circ < x < 60^\circ.$$

Далее применяем метод проб:

x	$\sin x + \cos x$		$\operatorname{tg} x$	
50°	1,409	$>$	1,192	
55°	1,393	$<$	1,428	$50^\circ < x < 55^\circ$
60°	1,366	$<$	1,732	

Эта таблица составляется следующим образом. Находим $\sin x$ и $\cos x$ (этого мы не показываем) и записываем их сумму. Между графами «$\sin x + \cos x$» и «$\operatorname{tg} x$» мы записываем результат сравнения этих двух чисел. Знак $>$ в первой строке означает, что при $x = 50^\circ$ точка синусоиды лежит выше точки тангенсоиды. Знак $<$ во второй строке означает, что при $x = 55^\circ$ точка синусоиды лежит ниже точки тангенсоиды. Следовательно, пересечение кривых происходит между 50° и 55°. Делим этот интервал на пять равных частей:

x	$\sin x + \cos x$		$\operatorname{tg} x$	
50°		$>$		
51°				$54^\circ < x < 55^\circ$
52°				
53°	1,400	$>$	1,327	
54°	1,397	$>$	1,376	
55°		$<$		

По поводу заполнения этой таблицы сделаем два замечания:

1) Числа в первой и последней строках не записываются. Числа нужны только для того, чтобы определить знак неравенства между ними. Знаки неравенства в первой и последней строках всегда переносятся из предыдущей таблицы.

2) Графы заполняются не подряд, а начиная приблизительно с середины, т. е. с 52° или 53°. После заполнения этой строчки отпадает необходимость заполнять один из двух получившихся частичных интервалов. Так, заполнив строку «53°», мы получаем в ней знак «>». Следовательно, искомый корень лежит между 53° и 54°. После этого заполнять строки «51°» и «52°» уже не нужно, а нужно лишь заполнить строку «54°».

Дальнейшие пробы не нуждаются в объяснениях:

x	$\sin x + \cos x$		$\operatorname{tg} x$	
54° 00′		>		
54° 30′	1,395	<	1,402	54° 00′ < x < 54° 30′
55° 00′		<		

Так как значения $\sin x + \cos x$ уже стали мало отличаться от значения $\operatorname{tg} x$ (т. е. мы подошли близко к корню), то следует увеличить точность. В дальнейших таблицах мы пользуемся значениями тригонометрических функций с четырьмя и пятью знаками после запятой:

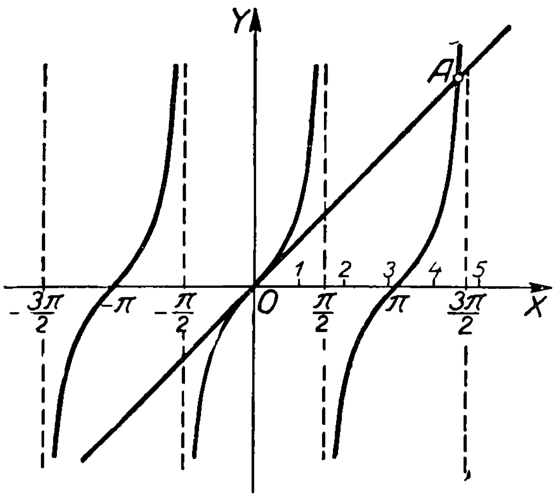
x	$\sin x + \cos x$		$\operatorname{tg} x$	
54° 00′		>		
10′	1,3961	>	1,3848	
20′	1,3955	>	1,3934	54° 20′ < x < 54° 30′
30′		<		
54° 20′		>		
25′	1,3952	<	1,3976	54° 20′ < x < 54° 25′
30′		<		
54° 20′		>		
21′	1,39542	>	1,39421	
22′	1,39536	>	1,39507	54° 22′ < x < 54° 23′
23′	1,39529	<	1,39593	
24′				
25′		<		

Мы условились давать ответ в минутах. Нужна еще одна проба, чтобы выяснить, к которой из двух границ $54°22'$ и $54°23'$ корень лежит ближе.

x	$\sin x + \cos x$		$\operatorname{tg} x$	
$54°22'00''$		$>$		
$22'30''$	1,39533	$<$	1,39550	$54°22'00'' < x < 54°22'30''$
$23'00''$		$<$		

Ответ. $x = 54°22'$ (с недостатком; погрешность меньше $30''$).

147. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$.



Черт. 18

Решение. Эта задача решается тем же методом, что и предыдущая. Графически устанавливаем, что наименьший положительный корень (см. точку A на черт. 18) лежит между 4 и $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$. Ветвь тангенсоиды, проходящая через начало, касается прямой $y = x$ и не имеет с ней общих точек, кроме начала координат.

При пробах следует пользоваться тригонометрической таблицей числового аргумента:

x		$\operatorname{tg} x$	
4,0	$>$	1,158	
4,1			
4,2			
4,3	$>$	2,286	$4,4 < x < 4,5$
4,4	$>$	3,096	
4,5	$<$	4,638	
4,6	$<$	8,860	
4,40	$>$		
4,45	$>$	3,723	$4,45 < x < 4,50$
4,50	$<$		
4,45	$>$		
4,46			
4,47			
4,48	$>$	4,225	$4,49 < x < 4,50$
4,49	$>$	4,422	
4,50	$<$		
4,490	$>$		
4,495	$<$	4,527	$4,490 < x < 4,495$
4,500	$<$		
4,490	$>$		
4,491			
4,492			
4,493	$>$	4,485	$4,493 < x < 4,494$
4,494	$<$	4,506	
4,495	$<$		
4,4930	$>$		
4,4935	$<$	4,4953	$4,4930 < x < 4,4935$
4,4940	$<$		

Ответ. $x = 4,493$ (с недостатком; погрешность меньше 0,0005).

148. Вычислить приближенно наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{x}$.

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

Вычислить (№ 149 и 150).

149. 1) $\cos i$,

2) $\sin i$.

150. $\sin(2+3i)$.

151. Решить уравнения:

1) $\cos z = 1{,}25$.

Решение. Выразим $\cos z$ по формуле Эйлера [формула (XIII. 4)]:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1{,}25.$$

Обозначим $e^{iz}=t$. Тогда

$$\frac{t+\frac{1}{t}}{2}=1{,}25,$$

$$2t^2-5t+2=0,\ t_1=2,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

а) Рассмотрим первый случай: $e^{iz}=2$. Логарифмируем это равенство, используя формулу для логарифма (натурального) комплексного числа [формула (XIII. 10)]:

$$iz=\mathrm{Ln}\,2=\ln 2+i\,2k\pi.$$

Умножаем обе части на $-i$:

$$z=2k\pi-i\ln 2.$$

b) $e^{iz}=\frac{1}{2}$; $\quad iz=\mathrm{Ln}\frac{1}{2}=\ln\frac{1}{2}+i\cdot 2k\pi=-\ln 2+i\cdot 2k\pi$;

$$z=2k\pi+i\ln 2.$$

Ответ. $z=2k\pi\pm i\ln 2$.

2) $\sin z=\frac{25}{7}$.

152. Решить уравнения:

$$1)\ \cos z = 2{,}4\,i, \quad 2)\ \sin z = i\sqrt{3}.$$

153. В каких случаях $\sin z$, где $z = x + iy$, есть действительное число?

Решение.

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cos iy + \cos x \cdot \sin iy =$$
$$= \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cos x \cdot \operatorname{sh} y$$

[см. формулы (XIII. 6) и (XIII. 7)].
$\sin z$ действителен при одном из двух условий:

$$\text{a)}\ \operatorname{sh} y = 0, \text{ откуда } y = 0.$$

Это — тривиальный случай: синус действительного аргумента действителен.

$$\text{b)}\ \cos x = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{2}(2k + 1).$$

§ 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(Обозначения см. на стр. 181)

154. Решить прямоугольный треугольник: $c = 12{,}8$, $h = 4{,}6$.

Решение.

$$a = c \cdot \sin A,$$
$$b = c \cdot \cos A.$$

Перемножаем эти равенства:

$$ab = c^2 \cdot \sin A \cdot \cos A = \frac{c^2}{2} \sin 2A.$$

С другой стороны, известно, что $ab = ch$. Следовательно,

$$ch = \frac{c^2}{2} \sin 2A,$$

$$\sin 2A = \frac{2h}{c} = \frac{9{,}2}{12{,}8} = 0{,}71875,$$

откуда

$$\text{либо } 2A = 45°57', \ A = 22°59',$$

$$\text{либо } 2A = 180° - 45°57' = 134°03', \ A = 67°01'.$$

Эти две возможности не следует считать существенно различными, так как они определяют один и тот же треугольник. Поскольку в условии задачи нет данных для различения острых углов, можно любой из них принять за 22°59′, а другой за 67°01′.

Наконец,

$$a = c \sin A = 12{,}8 \cdot \sin 22°59' = 12{,}8 \cdot 0{,}39046 = 4{,}9979,$$

$$b = c \cdot \cos A = 12{,}8 \cdot \cos 22°59' = 12{,}8 \cdot 0{,}92062 = 11{,}8391.$$

Примечание. Здесь показан ход вычислений в предположении, что данные точные. Если же считать их приближенными (что более естественно, поскольку они выражены десятичными дробями), то результаты следует округлить:

$$a = 5{,}0,\ b = 11{,}8.$$

Углы (при вычислениях с тремя значащими цифрами) определяются с точностью порядка 6′. В данной задаче можно округлить угол A так:

$$A = 23°.$$

Аналогичное замечание относится ко всем геометрическим задачам на вычисление.

155. Решить прямоугольный треугольник: $p = 6$, $B = 35°$.

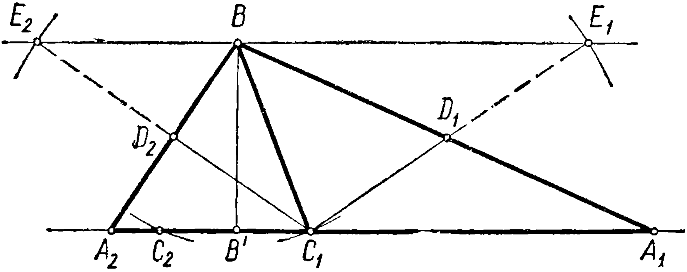
156. Доказать: если в прямоугольном треугольнике тангенс половины острого угла равен $\frac{1}{2}$, то это—«египетский» треугольник*.

157. Решить треугольник: $a = 67$, $h_b = 58$, $m_c = 56$.

Решение. Заметим (хотя это и не требуется для решения задачи), что задача допускает в общем случае два решения. Для построения искомого треугольника проведем две параллельные прямые, расстояние между которыми равно h_b (черт. 19). Примем произвольную точку, например, на верхней прямой за B и опустим из нее перпендикуляр BB' на нижнюю прямую; это и будет h_b. Из точки B радиусом a делаем засечки на нижней прямой. Если $a > h_b$, то получим две засечки C_1 и C_2; это — два возможных положения вершины C. Из точки C_1 радиусом $2m_c$ делаем засечки E_1 и E_2 на верхней прямой (предполагая, что $2m_c > h_b$). Середины отрезков C_1E_1 и C_1E_2, обо-

* Т. е. треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5.

значенные соответственно D_1 и D_2, суть возможные положения конца медианы m_c. Проводя прямые BD_1 и BD_2 до пересечения с нижней прямой, получим точки A_1 и A_2. Треугольники A_1BC_1 и A_2BC_1 удовлетворяют условиям задачи.



Черт. 19

Используя вместо точки C_1 точку C_2, мы придем к таким же треугольникам, т. е. решений — два, а не четыре.

Переходим к аналитическому решению. Деля h_b на a, получим:

$$\sin C = \frac{h_b}{a} = \frac{58}{67} = 0{,}86567,$$

откуда находим два возможных значения C. Сразу же найдем (по таблице) их косинусы:

$$C_1 = 59°58'; \ \cos C = 0{,}50061;$$

$$C_2 = 180° - C_1 = 120°02'; \ \cos C_2 = -0{,}50061.$$

Используем формулу для медианы [формула (XIV. 11)]:

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2ab\cos C).$$

В этой формуле все величины, кроме b, известны. Поэтому она представляет уравнение для нахождения b. Рассмотрим отдельно два варианта:

1) $56^2 = \frac{1}{4}(67^2 + b^2 + 2 \cdot 67 \cdot 0{,}50061 \cdot b)$,

или

$$b^2 + 67{,}082\, b - 8055 = 0,$$

$$b = -33{,}541 \pm \sqrt{1125{,}0 + 8055} = -33{,}541 \pm \sqrt{9180} =$$

$$= -33{,}541 \pm 95{,}812.$$

Окончательно: $b_1 = 62,271$ (отрицательное значение, разумеется, не годится).

2) Второй вариант отличается только знаком $\cos C$. Уравнение для b будет:

$$b^2 - 67,082\,b - 8055 = 0,$$

откуда $b = 33,541 \pm 95,812$; $b_2 = 129,35$.

Теперь вычисляем c по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C.$$

1) $c^2 = 67^2 + 62,271^2 - 2 \cdot 67 \cdot 62,271 \cdot 0,50061 =$

$$= 4489 + 3877,68 - 4177,25 = 4189,43,$$

$c_1 = \sqrt{4189,43} = 64,726.$

2) $c^2 = 67^2 + 129,35^2 + 2 \cdot 67 \cdot 129,35 \cdot 0,50061 =$

$$= 4489 + 16731,42 + 8677,02 = 29897,44,$$

$$c_2 = \sqrt{29897,44} = 172,91.$$

Угол A проще всего определить по формуле $\sin A = \frac{h_b}{c}$.

Первый вариант.

$$\sin A_1 = \frac{h_b}{c_1} = \frac{58}{64,726} = 0,89609.$$

Угол треугольника определяется по синусу двузначно. В данном случае угол A_1 — острый, потому что $a^2 < b_1^2 + c_1^2$. Можно даже не проверять это неравенство, так как сразу видно, что треугольник со сторонами $a = 67$, $b_1 \approx 62$ и $c_1 \approx 65$ близок к равностороннему и, следовательно, его углы близки к $60°$. Поэтому

$$A_1 = 63°39'.$$

Наконец, $B_1 = 180° - (63°39' + 59°58') = 56°23'$.

Второй вариант.

$$\sin A_2 = \frac{h_b}{c_2} = \frac{58}{172,91} = 0,33544.$$

В этом варианте треугольник уже имеет один тупой угол ($C_2 = 120°02'$). Поэтому угол A_2 — острый.

$$A_2 = 19°36',$$

$$B_2 = 180° - (19°36' + 120°02') = 40°22'.$$

158. Решить треугольник:

$$l_a = 72{,}5, \quad A = 36°41', \quad B = 105°10'.$$

159. Дуга сегмента круга в угловом выражении равна α радианов, а длина ее равна s. Определить радиус круга, вписанного в этот сегмент.

160. Диаметр монеты (одна копейка выпуска 1961 г.) равен 15 *мм*. Диаметр Луны виден с Земли (при средней высоте Луны над горизонтом) под углом $31'$. На каком расстоянии от глаза следует поместить монету, чтобы она в точности закрыла лунный диск?

161. Доказать, что во всяком треугольнике

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Решение. Как известно, $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$. По теореме синусов $\frac{c}{\sin C} = 2R$, откуда $\sin C = \frac{c}{2R}$. Таким образом,

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

162. $b = (2 + \sqrt{3})\,c$, $A = 60°$. Найти (точно) B и C.

Решение. Из условия нам известно отношение $\frac{b}{c}$. Но мы можем также узнать отношения других сторон и тем самым узнать форму треугольника. Для этого используем теорему косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = (2 + \sqrt{3})^2 c^2 + c^2 -$$

$$- 2(2 + \sqrt{3})\,c^2 \cdot \frac{1}{2} = (6 + 3\sqrt{3})\,c^2,$$

откуда

$$\frac{a}{c} = \sqrt{6 + 3\sqrt{3}}.$$

Используя формулу для преобразования сложных радикалов [формула (XVII. 1)], это отношение можно представить так:

$$\frac{a}{c}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}.$$

Так как синусы углов пропорциональны противолежащим сторонам, то

$$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},$$

$\angle A=60^\circ$. Таким образом,

$$\sin C=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

откуда $C=15^\circ$ (см. решение задачи № 4). Следовательно, $B=180^\circ-(60^\circ+15^\circ)=105^\circ$.

163. $a:b:R=\lambda:\mu:\nu$. Найти углы треугольника.

164. Доказать: если котангенсы половин углов треугольника суть последовательные целые числа, то это «египетский» треугольник.

Решение. Пусть $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=n$, $\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=n+1$, $\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=n+2$. Из равенства $A+B+C=180^\circ$ следует

$$\frac{C}{2}=90^\circ-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}-1}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}},$$

$$\frac{1}{n+2}=\frac{n(n+1)-1}{n+(n+1)},$$

$$n^3+3n^2-n-3=0,$$

$$(n+3)(n^2-1)=0.$$

Из трех корней этого уравнения по смыслу задачи годится только один: $n = 1$ (потому что котангенсы половин углов треугольника не могут быть отрицательны). Следовательно,

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = 1, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{1^2 - 1}{2 \cdot 1} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = 2, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{2^2 - 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = 3, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{3^2 - 1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{3},$$

откуда видно, что треугольник — прямоугольный ($A = 90°$) и отношение его катетов есть 3 : 4.

165. Отношения сторон треугольника:

$a : b : c = (2t + 1) : (t^2 - 1) : (t^2 + t + 1)$.

Доказать, что один из углов этого треугольника равен 120°.

166. Дан двугранный угол α. В одной из его граней из точки M проведена наклонная, равная a, от точки M до ребра и образующая с ребром двугранного угла угол, равный β. Найти расстояние точки M до другой грани двугранного угла.

167. Найти двугранный угол правильного тетраэдра.

§ 14. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

(Обозначения см. стр. 183)

168. Тропики отстоят на 23° 27′ 30″ от экватора, а полярные круги — на такой же угол от полюсов. Какую часть (выразить в процентах с одной цифрой после запятой) составляет площадь каждого климатического пояса от площади всей поверхности Земли (Землю принимать за шар).

169. Решить прямоугольный сферический треугольник:

$$a = 38°\,24', \quad b = 59°\,36'.$$

Решение. Различают шесть случаев решения прямоугольных треугольников. Это — первый (даны два катета). Используем формулы (XV. 7) и (XV. 3):

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c},$$

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

$$\cos c = \cos 38^\circ 24' \cdot \cos 59^\circ 36' = 0{,}78369 \cdot 0{,}50603 = 0{,}39658;$$

$$c = 60^\circ 38'; \ \sin c = 0{,}91801.$$

Заметим, что $\sin c$ может быть найден и без нахождения в той же строке таблицы (или между теми же строками при помощи интерполяции), что и $\cos c$:

$$\sin A = \frac{\sin 38^\circ 24'}{\sin c} = \frac{0{,}62115}{0{,}91801} = 0{,}67662.$$

Этому значению синуса соответствуют два угла между 0 и 180°. Следует выбрать один из них, руководствуясь правилом: катет и противолежащий угол одновременно соответственно острые, прямые или тупые. Учитывая, что катет $a < 90^\circ$, заключаем:

$$A = 42^\circ 35'.$$

Наконец,

$$\sin B = \frac{\sin 59^\circ 36'}{\sin c} = \frac{0{,}86251}{0{,}91801} = 0{,}93955; \quad B = 69^\circ 59'.$$

Решить прямоугольные сферические треугольники (№ 170 — 173).

170. $a = 32^\circ 44'$, $c = 139^\circ 00'$.

171. $a = 38^\circ 28'$, $A = 56^\circ 01'$.

172. $b = 37^\circ 52'$, $A = 49^\circ 22'$.

173. $A = 58^\circ 28'$, $B = 53^\circ 43'$.

174. Решить прямосторонний сферический треугольник:

$$a = 138^\circ 55', \qquad b = 115^\circ 50'.$$

Решение. Если данный треугольник — прямосторонний, то полярный ему треугольник — прямоугольный. Снабжая элементы полярного треугольника индексом 1, получим:

$$A_1 = 180° - a = 41° 05',$$

$$B_1 = 180° - b = 64° 10'.$$

Таким образом, задача сводится к решению прямоугольного треугольника по двум углам (шестой случай). Используем формулы (XV. 6) и (XV. 8):

$$\cos a_1 = \frac{\cos 41° 05'}{\sin 64° 10'} = \frac{0,75376}{0,90007} = 0,83745; \ a_1 = 33° 08',$$

$$\cos b_1 = \frac{\cos 64° 10'}{\sin 41° 05'} = \frac{0,43576}{0,65716} = 0,66309; \ b_1 = 48° 28',$$

$$\cos c_1 = \operatorname{ctg} 41° 05' \cdot \operatorname{ctg} 64° 10' = 1,14700 \cdot 0,48414 = $$
$$= 0,55530; \ c_1 = 56° 16'.$$

Теперь переходим от полярного треугольника обратно к данному:

$$A = 180° - a_1 = 146° 52',$$
$$B = 180° - b_1 = 131° 32',$$
$$C = 180° - c_1 = 123° 44'.$$

Решить прямосторонние сферические треугольники (№ 175 — 177).

175. $a = 36° 42'$, $B = 70° 02'$.

176. $a = 58° 26'$, $A = 49° 43'$.

177. $A = 50° 59'$, $B = 39° 20'$.

178. Решить сферический треугольник:

$$a = 34° 13', \quad b = 42° 55', \quad c = 51° 03'.$$

Решение. Это — первый случай решения косоугольных сферических треугольников (даны три стороны). Можно воспользоваться формулами «косинуса стороны» [формулы (XVI. 4)]:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\cos 34^\circ 13' - \cos 42^\circ 55' \cdot \cos 51^\circ 03'}{\sin 42^\circ 55' \cdot \sin 51^\circ 03'} =$$

$$= \frac{0,82692 - 0,73235 \cdot 0,62864}{0,68093 \cdot 0,77770} = \frac{0,82692 - 0,46044}{0,52956} =$$

$$= \frac{0,36647}{0,52956} = 0,69203; \quad A = 46^\circ 13'.$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cdot \cos a}{\sin c \cdot \sin a} = \frac{\cos 42^\circ 55' - \cos 51^\circ 03' \cdot \cos 34^\circ 13'}{\sin 51^\circ 03' \cdot \sin 34^\circ 13'} =$$

$$= \frac{0,73235 - 0,62864 \cdot 0,82692}{0,77770 \cdot 0,56232} = \frac{0,73235 - 0,51981}{0,43732} = \frac{0,21253}{0,42732} =$$

$$= 0,48599; \quad B = 60^\circ 55'.$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\cos 51^\circ 03' - \cos 34^\circ 13' \cdot \cos 42^\circ 55'}{\sin 34^\circ 13' \cdot \sin 42^\circ 55'} =$$

$$= \frac{0,62864 - 0,82692 \cdot 0,73235}{0,56232 \cdot 0,68093} = \frac{0,62864 - 0,60558}{0,38291} = \frac{0,02307}{0,38291} =$$

$$= 0,06024; \quad C = 86^\circ 33'.$$

Решить сферические треугольники (№ 179—181).

179. $A = 62^\circ 06'$, $B = 54^\circ 36'$, $C = 70^\circ 15'$.

180. $a = 48^\circ 13'$, $b = 37^\circ 31'$ $C = 55^\circ 06'$.

181. $a = 47^\circ 05'$, $b = 36^\circ 40'$, $A = 56^\circ 17'$.

Пользуясь следующей таблицей географических координат

Москва	$55^\circ 45'$	сев.	шир.,	$37^\circ 37'$	вост.	долг.
Новосибирск	$55^\circ 02'$	»	»	$82^\circ 56'$	»	»
Хабаровск	$48^\circ 28'$	»	»	$135^\circ 05'$	»	»
Пекин	$39^\circ 54'$	»	»	$116^\circ 28'$	»	»

и принимая Землю за шар радиуса $R = 6370$ *км*, решить задачи № 182 и 183.

182. Найти кратчайшее расстояние по земной поверхности: 1) от Москвы до Новосибирска, 2) от Москвы до Пекина.

Решение. 1) Соединим дугами меридианов (кратчайшими) Москву и Новосибирск с Северным полюсом и рассмотрим сферический треугольник ABC, где A — Москва, B — Новосибирск, C — Северный полюс. Очевидно,

$$a = CB = 90^\circ - \text{широта Новосибирска} = 34^\circ 58',$$
$$b = AC = 90^\circ - \text{широта Москвы} = 34^\circ 15',$$
$$C = \text{долгота Новосибирска} - \text{долгота Москвы} = 45^\circ 19'.$$

Теперь сторона c (в угловой мере) может быть найдена по формуле косинуса стороны формулы (XVI. 4):

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C =$$
$$= \cos 34^\circ 58' \cdot \cos 34^\circ 15' + \sin 34^\circ 58' \cdot \sin 34^\circ 15' \cdot \cos 45^\circ 19' =$$
$$= 0{,}81949 \cdot 0{,}82659 + 0{,}57310 \cdot 0{,}56281 \cdot 0{,}70319 =$$
$$= 0{,}67737 + 0{,}22681 = 0{,}90418; \quad c = 25^\circ 44'.$$

Используя таблицы, дающие длину дуги окружности радиуса $R = 1$, найдем: длина дуги $25^\circ 44' = 0{,}449$. Отсюда искомое расстояние: 6370 *км* $\times 0{,}449 = 2860$ *км*.

Примечание. В авиационно-транспортных справочниках расстояние между Москвой и Новосибирском указывается 2808 *км**.

Не будем удивляться этому расхождению, потому что искомое расстояние не вполне определенное, так как Москва и Новосибирск не точки. При указании географических координат какого-нибудь города обычно имеют в виду определенную точку в этом городе, например за географические координаты Москвы принимают широту и долготу Московской астрономической обсерватории. В авиации же принято считать расстояние между аэродромами.

183. Какие углы дуга большого круга Москва — Хабаровск образует с меридианами этих городов?

---

* См., например, Военно-топографическое управление генерального штаба, Атлас мира, М., 1954, стр. 320.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

§ 1. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Доказать тождества (№ 184—210).

184. $\cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \cos 2\alpha\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right).$

185. $\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

186. $\frac{\sec\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$

187. $\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\alpha.$

188. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sin\alpha.$

189. $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$

190. 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha.$

2) $\frac{2}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \cos\alpha.$

191. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha.$

192. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \dfrac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}$

193. $\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ) + \cos^2\alpha = \dfrac{3}{4}.$

194. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ) = 3 \operatorname{tg} 3\alpha.$

195. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 3\alpha.$

196. $\sin 3\alpha \cdot \sin^3\alpha + \cos 3\alpha \cdot \cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha.$

197. $\sin 3\alpha \cdot \csc \alpha - \cos 3\alpha \cdot \sec \alpha = 2.$

198. $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha \cdot \sin \alpha.$

199. $\dfrac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$

200. $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha)(\cos \alpha + \cos 3\alpha) = 2 \sin 3\alpha.$

201. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$

202. $\dfrac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 3\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 3\alpha} = 1.$

203. $\dfrac{2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \csc \alpha.$

204. $\dfrac{\sin \alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha.$

205. $\dfrac{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha.$

206. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$

207. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha.$

208. $\dfrac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$

*209. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha.$

210. $$\frac{\sin\frac{\alpha}{3}+\sin\frac{2\alpha}{3}}{\cos\frac{\alpha}{3}+\cos\frac{2\alpha}{3}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

211. Найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, зная, что $\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=m$.

212. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, зная, что $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{11}{25}$.

213. Доказать:

1) $\cos\frac{\alpha}{2^n}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}}}$$

($n\geqslant 1$, радикалов n, символ $\frac{1}{2}$ повторяется $2n$ раз, $|\alpha|\leqslant 180^\circ$).

2) $\sin\frac{\alpha}{2^n}=$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\ldots+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}}}$$

($n\geqslant 1$, радикалов n, символ $\frac{1}{2}$ повторяется $2n$ раз, $|\alpha|\leqslant 180^\circ$).

3) $$\cos\frac{180^\circ}{2^n}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

($n\geqslant 2$, радикалов $n-1$).

4) $$\sin\frac{180^\circ}{2^n}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

($n\geqslant 2$, радикалов $n-1$).

214. 1) Выразить $\cos n\alpha$ при n нечетном через $\cos\alpha$. Применить к случаям $n=3, 5$.

2) Выразить $\cos n\alpha$ при n четном через $\sin\alpha$. Применить к случаям $n=2,\ 4,\ 6$.

3) Выразить $\cos n\alpha$ при n четном через $\cos\alpha$. Применить к случаям $n=2,\ 4,\ 6$.

215. Выразить $\operatorname{tg} n\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

***216.** 1) Составить уравнение для нахождения $\cos\frac{\alpha}{3}$, если известен $\cos\alpha$.

2) Составить уравнение для нахождения $\sin\frac{\alpha}{3}$, если известен $\sin\alpha$.

3) Составить уравнение для нахождения $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, если известен $\operatorname{tg}\alpha$.

Доказать тождества (№ 217 — 221).

217. $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}$.

218. $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)=$
$$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$$

219. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$.

220. 1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=$
$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

2) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

221. $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$
$$=4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.$$

222. Выразить $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+$ $+q\cos^2(\alpha+\beta)$ через p и q, зная, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ суть корни уравнения $x^2+px+q=0$.

223. Может ли быть, и если может, то в каких случаях
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta?$$

Доказать (№ 224—229).

* **224.** Числитель и знаменатель правой части формулы (IV. 11)

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}$$

не могут одновременно быть нулями.

***225.** Выражения $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ и $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$ не могут одновременно быть нулями.

226. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\sin 2\alpha$ всегда одного знака.

227. Выражение $\frac{1}{8}(\sin^8 x-\cos^8 x)-\frac{1}{3}\sin^6 x+$

$$+\frac{1}{6}\cos^6 x+\frac{1}{4}\sin^4 x$$ не зависит от x.

228. Если $\sin(-\alpha+\beta+\gamma)$, $\sin(\alpha-\beta+\gamma)$ и $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ образуют арифметическую прогрессию, то $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$ тоже образуют арифметическую прогрессию.

229. $\sin x$ и $\cos x$ оба рациональны в том и только в том случае, если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ рационален.

Найти (точно) синусы и косинусы следующих углов (№ 230—234).

***230.** 42° и 48°.

231. 33° и 57°.

232. 27° и 63°. **233.** 12° и 78°.

234. 36° и 54°.

Найти (точно) острый угол α, для которого (№ 235—244):

235. $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **236.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

237. $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}-1$. **238.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

239. $\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **240.** $\operatorname{tg}\alpha=2-\sqrt{3}$.

241. $\sin\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$. 242. $\sin\alpha = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

243. $\csc\alpha = \sqrt{5}+1$. 244. $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{1+\sqrt{0{,}8}}$.

Доказать тождества (№ 245—248).

245. $\cos 25^\circ + \cos 47^\circ = \cos 11^\circ + \cos 61^\circ + \sin 7^\circ$.

246. $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$.

247. $2(\cos^4 44^\circ + \sin^4 44^\circ) = 1 - \cos 4^\circ + \cos^2 2^\circ$.

248. $\cos 27^\circ - \cos 63^\circ = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$.

Вычислить (№ 249 и 250).

249. $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{1}{4}\right)$. 250. $\operatorname{ctg}(2\operatorname{arctg} 2)$.

Упростить (№ 251 и 252).

251. $\cos(2\arccos x)$. 252. $\operatorname{tg}(2\arcsin x)$.

Доказать тождества (№ 253—264).

253. $2\arcsin\frac{2}{7} = \arccos\frac{41}{49}$.

254. $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} + \arcsin\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\pi}{4}$.

255. $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17} = \arcsin\frac{77}{85}$.

256. 1) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$.

2) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{33}{65} = \frac{\pi}{2}$.

257. $\operatorname{arctg} 3 - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\pi}{4}$.

258. $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}$.

259. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$.

260. 1) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{7}=\frac{\pi}{3}$.

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{5}\right)=-\frac{\pi}{4}$.

3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

261. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{m}+\operatorname{arctg}\frac{m-1}{m+1}=\frac{\pi}{4}$.

2) $\operatorname{arctg}\frac{n}{m}+\operatorname{arctg}\frac{m-n}{m+n}=\frac{\pi}{4}$.

262. 1) $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arcctg}3$.

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\operatorname{arctg}\frac{3}{11}=\frac{\pi}{4}$.

263. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

264. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

Найти x (№ 265 — 276).

265. $\arcsin x=2\arcsin a$.

266. $\arccos x=2\arcsin a$.

267. $\arcsin x=4\arcsin a$.

268. $\operatorname{arcctg} x=2\operatorname{arctg} a$.

269. $\operatorname{arctg} x=4\operatorname{arctg} a$.

270. $\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg} 2a$.

271. $\arccos x=\arcsin 2a$.

272. $\arcsin x=\frac{\pi}{2}+\arcsin a$.

273. $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg} 3a$.

274. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{arcsec} a.$

275. 1) $\operatorname{arctg} x = 3 \arcsin a.$

2) $\operatorname{arcctg} x = 3 \arccos a.$

276. $\arcsin x = 2 \arcsin a + \arcsin 2b.$

§ 2. УСЛОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Доказать, что при $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ имеют место тождества (№ 277 — 288).

277. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

278. $\cos\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

279. 1) $\cos\alpha - \sin\beta - \sin\gamma =$
$$= -4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2) $\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma =$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right).$$

3) $\cos\alpha + \sin\beta - \sin\gamma =$
$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

280. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}.$

281. $\frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$

282. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \sec\gamma.$

283. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}\gamma.$

284. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha=1.$

285. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma=-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma.$

286. 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2(1+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma).$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma.$

287. 1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma.$

2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma.$

288. 1) $\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma+\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma+$
$+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma.$

2) $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma+$
$+\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma=1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ имеют место следующие тождества (№ 289 — 301).

289. 1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\dfrac{2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$

2) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}-1.$

3) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}.$

4) $\sin\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$
$=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\gamma}{2}\right).$

290. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}.$

291. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+$
$+\csc\alpha\csc\beta\csc\gamma.$

292. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma.$

293. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}+\dfrac{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}+\dfrac{\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha}=1.$

294. 1) $\sin 4n\alpha+\sin 4n\beta+\sin 4n\gamma=$
$=-4\sin 2n\alpha\cdot\sin 2n\beta\cdot\sin 2n\gamma.$

2) $\sin(4n+1)\alpha+\sin(4n+1)\beta+\sin(4n+1)\gamma=$
$=4\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\alpha\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\beta\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\gamma.$

3) $\sin(4n+2)\alpha+\sin(4n+2)\beta+\sin(4n+2)\gamma=$
$=4\sin(2n+1)\alpha\sin(2n+1)\beta\sin(2n+1)\gamma.$

4) $\sin(4n+3)\alpha+\sin(4n+3)\beta+\sin(4n+3)\gamma=$
$=-4\cos\left(2n+\frac{3}{2}\right)\alpha\cos\left(2n+\frac{3}{2}\right)\beta\cos\left(2n+\frac{3}{2}\right)\gamma.$

295. 1) $\cos 4n\alpha+\cos 4n\beta+\cos 4n\gamma=$
$=4\cos 2n\alpha\cos 2n\beta\cos 2n\gamma-1.$

2) $\cos(4n+1)\alpha+\cos(4n+1)\beta+\cos(4n+1)\gamma=$
$=1+4\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\alpha\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\beta\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\gamma.$

3) $\cos(4n+2)\alpha+\cos(4n+2)\beta+\cos(4n+2)\gamma=$
$=1-4\cos(2n+1)\alpha\cos(2n+1)\beta\cos(2n+1)\gamma.$

4) $\cos(4n+3)\alpha+\cos(4n+3)\beta+\cos(4n+3)\gamma=$
$=1-4\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\alpha\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\beta\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\gamma.$

296. 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

297. 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

298. 1) $\cos^2 n\alpha+\cos^2 n\beta+\cos^2 n\gamma=$
$=1+2(-1)^n\cos n\alpha\cos n\beta\cos n\gamma.$

2) $\sin^2 n\alpha+\sin^2 n\beta+\sin^2 n\gamma=$
$=2[1+(-1)^n\cos n\alpha\cos n\beta\cos n\gamma].$

299. 1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=$
$=\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma-1.$

2) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1.$

300. $\dfrac{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}=$

$$=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

301. $\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=3\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+$

$$+\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}.$$

Доказать (№ 302 и 303).

302. Если $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, то $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)=2.$

303. Если $\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$, то $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)}=\dfrac{1}{2}.$

Доказать, что при $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ имеют место сл дующие тождества (№ 304—308).

304. 1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

2) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma-\cos\delta=$

$$=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

3) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma-\sin\delta=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

305. 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=$

$$=2[1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)].$$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=$

$$=2[1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)].$$

306. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma-\sin^2\delta=$

$$=-2\cos(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha).$$

307. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta =$
$$= -\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\delta)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta}.$$

308. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$

Доказать (№ 309 — 312).

309. Если $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

310. 1) Если $\alpha+\beta+\gamma=2n\pi$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$
$$=4(-1)^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

2) Если $\alpha+\beta+\gamma=2n\pi$, то $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$
$$=-1+(-1)^n\,4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

311. 1) Если $\alpha+\beta+\gamma=(2n-1)\pi$, то
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(-1)^{n+1}4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

2) Если $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$, то
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+(-1)^n 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

312. Если $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$, то
$$\cos^4\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\beta}{2}+\cos^4\frac{\gamma}{2}-2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\right)+$$
$$+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=0.$$

Доказать, что при $\alpha+\beta=\gamma$ имеют место следующие тождества (№ 313 — 317).

313. 1) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}-1.$

2) $\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1.$

3) $\cos\alpha + \cos\beta + \sin\gamma =$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\cos\gamma.$$

4) $\cos\alpha - \cos\beta + \sin\gamma =$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

5) $\cos\alpha - \sin\beta + \cos\gamma$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

6) $\sin\alpha + \sin\beta + \cos\gamma =$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

7) $\sin\alpha - \cos\beta + \sin\gamma =$

$$= 1 - 4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

8) $\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$

314. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1.$

315. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$

316. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}\gamma = 1.$

317. 1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma).$

3) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

4) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$

5) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 1 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

6) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = -2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$

Доказать (№ 318 — 330).

318. Если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$, то $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$.

319. Если $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha=1$, то $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

***320.** Если $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=1$, то одно из выражений $\alpha+\beta+\gamma$, $-\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha-\beta+\gamma$, $\alpha+\beta-\gamma$ равно $(2n+1)\pi$.

321. Если $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, то $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

322. Если $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$, то

$\sin\alpha-\cos\alpha=\pm\sqrt{2}\sin\varphi$.

323. Если $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha-5}$.

324. 1) Если $(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)(1+\cos\gamma)=(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)$, то каждая из частей этого равенства равна $\pm\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

2) Если $(1+\sin\alpha)(1+\sin\beta)(1+\sin\gamma)=(1-\sin\alpha)(1-\sin\beta)(1-\sin\gamma)$, то каждая из частей этого равенства равна $\pm\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

325. Если $\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\beta+\varphi)}=\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}}$, то $\operatorname{tg}^2\varphi=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

326. Если $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, то либо $\alpha+\beta+\gamma=(4n+1)\pi$, либо одно из выражений $\alpha-\beta-\gamma$, $-\alpha+\beta-\gamma$ и $-\alpha-\beta+\gamma$ равно $(4n-1)\pi$.

327. Если $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma$, то $\alpha+\beta+\gamma=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$.

328. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 2\operatorname{ctg}\gamma$, то $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 3$.

329. Если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 4 : 5 : 6$, то $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 12 : 9 : 2$.

330. Если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 - \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

§ 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ В СУММЫ

Преобразовать в произведения (привести к «логарифмическому виду») (№ 331 — 345).

331. 1) $1 + \cos\alpha + \sin\alpha$.

2) $1 + \cos\alpha - \sin\alpha$.

332. 1) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

2) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

3) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$.

333. $\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha$.

334. $1 - 2\sin 44^\circ \sin 46^\circ$.

335. $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

336. $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$.

337. 1) $\cos\alpha + \cos\beta + \sin(\alpha + \beta)$.

2) $\cos\alpha + \cos\beta - \sin(\alpha + \beta)$.

338. 1) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2(\alpha + \beta)$.

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2(\alpha - \beta)$.

339. 1) $\sin\alpha + \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h)$.

2) $\cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h)$.

3) $\dfrac{\sin\alpha + \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h)}{\cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h)}$.

340. $1+\operatorname{tg} 67^\circ+\operatorname{tg} 68^\circ$.

341. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta$.

2) $\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta-1$.

342. $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

343. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\beta+\sin\beta$.

344. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.

345. $\cos(54^\circ-\alpha)-\cos(18^\circ-\alpha)-\cos(54^\circ+\alpha)+$
$+\cos(18^\circ+\alpha)$.

Следующие выражения преобразовать в произведения (привести к «логарифмическому виду») при помощи введения вспомогательного угла (№ 346—350).

346. $\dfrac{a-b}{a+b}$. 347. $\sqrt{a^2+b^2}$.

348. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{2}}$ $(|b|\leqslant|a|)$.

349. 1) $a+\sqrt{a^2+b^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

2) $a-\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>0,\ b>0,\ b<a)$.

350. $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$ $(0<b<a)$.

Следующие выражения преобразовать в сумму (№ 351 и 352).

351. $\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

352. 1) $\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

2) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

353. Вычислить (точно) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$.

Понизить степень (до первой) (№ 354—357).

354. 1) $\cos^5\alpha$. 2) $\sin^5\alpha$.

355. $\sin^3\alpha\cos^3\alpha$. 356. $\sin^2\alpha\cos^3\alpha$.

357. 1) $\cos^n\alpha$. 2) $\sin^n\alpha$.

§ 4. УРАВНЕНИЯ

Решить уравнения (№ 358 — 425).

358. 1) $\sin x + \cos x = 1{,}14$.

2) $2\sin x + 7\cos x = 6$.

359. $a\sin^2 x + b\cos^2 x = c\sin^2 x\cos^2 x$.

360. 1) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$.

2) $5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 14\cos^2 x = 4$.

361. $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$.

362. $\sin(x+\alpha) + \sin(x+\beta) = m$.

363. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\cos 15x$.

364. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$.

365. $\sin 3x = 8\sin^3 x$.

366. $\cos 3x = -2\cos 2x$.

367. $2\cos^2 5x - 1 = \cos 3x$.

368. $\sin 4x + 4\sin 3x\cos x = 0$.

369. $1 + \cos x = 2\sin^2 x$.

370. 1) $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

2) $\sin x + \cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 1$.

371. $\operatorname{tg} x = 4\cos x$.

372. $\operatorname{tg} 3x + 2\operatorname{tg} x = 0$.

373. $5\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$.

374. $4\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3\sin x$.

375. $\sin x = \operatorname{ctg} x$ $(0 < x < 90^\circ)$.

376. 1) $\sec x + \csc x = 2$.

2) $\sec x + \csc x = \frac{1}{2}$.

377. $\sin x + \cos x = \sec x$.

378. $\sin x + \sec x = 2\cos x$.

379. $\sin x + \cos x - \csc x = 0$.

380. $\sin x + \operatorname{tg} x = \cos x - \sec x$.

381. $2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = \sec^2 x + \csc^2 x$.

*382. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

383. $\sin 3x - \sin x = \frac{1}{2}$.

384. $\cos\left(x + \frac{3}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sin\alpha$.

385. $\sin(x+\alpha) + \cos(x+\alpha) = \sin(x-\alpha) + \cos(x-\alpha)$.

386. $p\sin(\alpha - x) = q\sin(\beta - x)$.

387. $\cos px + \cos qx + \cos(2p+q)x =$
$= \sin qx + \sin(2p+q)x$.

388. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1$.

389. $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$.

390. 1) $\cos px + \cos qx - \cos(p+q)x = 1$.
2) $\sin px + \sin qx + \sin(p-q)x = 0$.

391. $\sin^2(\alpha + x) + \sin^2(\alpha - x) = \frac{2}{3}$.

392. $\sin^2(\alpha + x) - \sin^2(\beta + x) = \sin(\alpha - \beta)$.

393. $\sin^6 x + \cos^6 x = a$.

394. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{1}{8}$.

395. $\frac{\sin x + \sin\alpha}{\cos x + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$.

396. $1 + \operatorname{tg}^6 x = \sec^6 x - \sec^2 x$.

397. $4\sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.

398. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin x$.

399. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$.

400. $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

*401. $\operatorname{tg}^2 x + \sec 2x = 7 - \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

402. $2\sin^2 x + \sin 5x + \sin 9x = 1$.

403. $\operatorname{tg} px \cdot \operatorname{tg} qx = 1$.

404. $\operatorname{tg}\left(1 + \frac{x}{2}\right) \operatorname{tg}\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -1$.

405. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \cos x$.

406. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

407. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

408. $\sec\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sec\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\sqrt{2}$.

409. $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.

410. $\sin 4x \sin 11x + \sin 2x \sin 5x = 0$.

411. $\sin 2x + \sin 3x = 3 \sin x$.

412. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0$.

413. $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} x)$.

414. $\sin(\pi \operatorname{ctg} x) = \cos(\pi \operatorname{tg} x)$.

415. $\sin\left(\frac{2\pi}{5} \cos x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5} \sin x\right)$.

*416. $\sin x = \csc 5x$.

*417. $\sin x + \sin y = 2$.

*418. $\cos x = \sec y$.

*419. $\cos x + \sec x = 2$.

*420. $\sin x + \sin y + \sin z = -3$.

*421. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$

*422. $\operatorname{ctg} 2^{n-1} x - \operatorname{ctg} 2^n x = \csc px.$

*423. $\operatorname{ctg} 2^{x-1} \alpha - \operatorname{ctg} 2^x \alpha = \csc 3\alpha \quad (0 < \alpha < 2\pi).$

424. $1 - 2\sin^2(2^{x-1}) = \cos 3\alpha.$

425. $\dfrac{\sin 2^x}{\sin 2^{x-2} \cdot \cos 2^{x-2}} = 2\sqrt{3}.$

Решить уравнения и исследовать полученные решения (№ 426 — 430).

426. $\cos^2 x - 3\cos x + a = 0.$

427. $a \cdot \cos^2 x + (2a^2 - a + 1)\sin x - 3a + 1 = 0.$

428. $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0.$

429. $\sin x \operatorname{tg} x + 2\cos x = a.$

430. $\sin\alpha \operatorname{tg}^2 x - 2\cos\alpha \operatorname{tg} x + 1 = 0.$

431. Доказать, что уравнение $4x + 2\sin 2x = \pi$ имеет единственный корень и что этот корень заключен между $\frac{\pi}{8}$ и $\frac{\pi}{4}$.

432. Зная, что α и β суть два существенно различных* корня уравнения $a\sin x + b\cos x = c$, найти:

1) $\sin\alpha \sin\beta$;

2) $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$;

3) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta$;

4) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta$.

Решить уравнения (№ 433 — 447).

433. $\cos x^2 = \frac{1}{2}.$

434. $\sin 3x = \cos(x^2 - 1).$

435. $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x).$

436. $\operatorname{tg}(\sec x) = \operatorname{ctg}(\cos x).$

---

* См. сноску на стр. 42.

437. $\cos(\cos x) = \sin(\cos 2x)$.

438. $\sin(\operatorname{ctg} x) = \cos(\operatorname{tg} x)$.

439. $\operatorname{tg}(\sqrt{3}\sin x) = \operatorname{tg}(\cos x)$.

440. 1) $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2) $\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

441. $\arcsin x = 2\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

442. 1) $\arccos x - \arcsin x = \arccos x\sqrt{3}$.

2) $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$.

443. $\operatorname{arctg}(x+1) - 3\operatorname{arctg}(x-1) = 0$.

444. $\operatorname{arcctg}(x-1) - \operatorname{arcctg}(x+1) = \frac{\pi}{12}$.

445. $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} 2x = \frac{3\pi}{4}$.

446. $\arcsin 2x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{2x} = \frac{\pi}{2}$.

447. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} + \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2} = \frac{3\pi}{2}$.

Решить следующие уравнения при помощи тригонометрических подстановок (№ 448—455).

448. $x = 0{,}7854\sqrt{1-x^2}$.

449. $2x\sqrt{1-x^2} = \sin t$.

450. $2\sqrt{x(1-x)} = \sin t$.

451. $x(1-x) = 0{,}22644$.

452. $3(x^2-x) = \operatorname{ctg} 104^\circ 04'$.

453. $1-x^2 = 2x\operatorname{ctg}\alpha$.

454. 1) $2x = (1+x^2)\sin\alpha$.

2) $2x = (1+x^2)\cos\alpha$.

455. $x = k(1-x^2)$.

§ 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Решить системы уравнений (№ 456 — 472).

456. 1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0, \\ \cos x + \cos y = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \cos y = \dfrac{2}{3}, \\ \cos x + \sin y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

457. $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}36, \\ \cos x \sin y = 0{,}14. \end{cases}$

458. $\begin{cases} 3(\sin x - \sin y) = 4(\sin 2x - \sin 2y), \\ 3(\cos x - \cos y) = 4(\cos 2x - \cos 2y). \end{cases}$

459. $\begin{cases} \sin x = 3 \sin y, \\ \operatorname{tg} x = 5 \operatorname{tg} y. \end{cases}$

460. $\begin{cases} \sin x \operatorname{ctg} y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}, \\ \operatorname{tg} x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$

461. $\begin{cases} \operatorname{tg} x = \sin y, \\ \sin x = 2 \operatorname{ctg} y. \end{cases}$

462. $\begin{cases} 4^{\sin x} + 3 \cdot 9^{\cos y} = 3, \\ 4^{-\sin x} + 5 \cdot 81^{\cos y + \frac{1}{2}} = \dfrac{11}{2}. \end{cases}$

463. $\begin{cases} x + y = 60^\circ, \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$

464. $\begin{cases} x+y+z=180^\circ, \\ \sin x = 2\sin y, \\ \sqrt{3}\sin y = \sin z. \end{cases}$

465. $\begin{cases} x+y+z=180^\circ, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = 2, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = 18. \end{cases}$

466. $\begin{cases} x+y+z=180^\circ, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 6. \end{cases}$

467. $\begin{cases} x+y+z=90^\circ, \\ \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c \quad (a>0,\ b>0,\ c>0). \end{cases}$

468. $\begin{cases} x+y+z=180^\circ, \\ \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y : \operatorname{tg} z = a : b : c\ (a>0,\ b>0,\ c>0). \end{cases}$

469. $\begin{cases} x+y+z=\alpha, \\ \sin x + \sin y + \sin z = \sin\beta, \\ \cos x + \cos y + \cos z = \cos\beta. \end{cases}$

470. $\begin{cases} x(\cos y + \cos z) = 2, \\ x(\cos 2y + \cos 2z) = -2, \\ x(\cos 3y + \cos 3z) = -4. \end{cases}$

471. $\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \sqrt{6}\sin y = \operatorname{tg} z, \\ 2\sin z = \sqrt{3}\operatorname{ctg} x. \end{cases}$

472. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 1, \\ \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z = 1, \\ \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z = 1. \end{cases}$

Из следующих систем уравнений исключить x (№ 473—483).

473. $\begin{cases} \sin 3x = a, \\ \cos 2x = b. \end{cases}$

474. $\begin{cases} \cos x - \sin x = a, \\ \sin 2x = b. \end{cases}$

475. $\begin{cases} \cos x + \sin x = a, \\ \cos^3 x + \sin^3 x = b. \end{cases}$

476. $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a, \\ \cos x + \cos 2x = b. \end{cases}$

477. $\begin{cases} \sin x + \cos x = a, \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = b. \end{cases}$

478. $\begin{cases} \sin x + \cos x = a, \\ \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = b. \end{cases}$

479. 1) $\begin{cases} a \sin x + b \cos x = p, \\ \cos 2x = q. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a \sin x + b \cos x = p, \\ \sin 2x = q. \end{cases}$

480. $\begin{cases} \sin x + \cos x = a, \\ \sin 2x + \cos 2x = b. \end{cases}$

481. $\begin{cases} \sin^4 x - \cos^4 x = a, \\ \sin x \cos x = b. \end{cases}$

482. $\begin{cases} b \cos x - a \sin x = c \cos 2x, \\ b \sin x + a \cos x = c \sin 2x. \end{cases}$

483. $\begin{cases} 3 \cos x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = a, \\ 3 \sin x - \cos x \sin 2x - \sin x \cos 2x = b. \end{cases}$

Из следующих систем уравнений исключить x и y (№ 484 и 485).

484. $\begin{cases} x - y = \alpha, \\ \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = b. \end{cases}$

485. 1) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \\ \cos(x - y) = c. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x + \cos y = a, \\ \cos x + \sin y = b, \\ \sin(x + y) = c. \end{cases}$

486. При каком значении a система

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = a, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \operatorname{tg} 15^\circ \end{cases}$$

совместна?

Из следующих систем уравнений исключить x, y и z (№ 487 и 488).

487. $\begin{cases} x + y + z = \pi, \\ \sin(x + y) = a, \\ \cos(y + z) = b, \\ \cos(z + x) = c. \end{cases}$ **488.** $\begin{cases} \operatorname{ctg} x = a, \\ \operatorname{ctg} y = b, \\ \operatorname{ctg} z = c, \\ \operatorname{tg}(x + y + z) = d. \end{cases}$

§ 6. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ И СВЕРТЫВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

489. Суммировать: $\cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h) + \ldots + \cos(\alpha + nh)$.

490. Доказать тождество:

$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots + \sin n\alpha}{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha} = \operatorname{tg}\frac{(n+1)\alpha}{2}.$$

Суммировать (№ 491 — 494).

491. $\cos\alpha - \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h) - \cdots + (-1)^n \cos(\alpha + nh)$.

492. $\sin\alpha - \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h) - \cdots + (-1)^n \sin(\alpha + nh)$.

493. 1) $\cos\alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1}\cos n\alpha$.

2) $\sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1}\sin n\alpha$.

494. 1) $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha$.

2) $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha$.

495. Доказать:

1) $$\cos\frac{\pi m}{n} + \cos\frac{3\pi m}{n} + \cos\frac{5\pi m}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \cos\frac{(2n-1)m\pi}{n} = 0.$$

2) $$\sin\frac{\pi m}{n} + \sin\frac{3\pi m}{n} + \sin\frac{5\pi m}{n} + \ldots$$
$$\ldots + \sin\frac{(2n-1)\pi m}{n} = 0.$$

* 496. Суммировать:

1) $\cos(\alpha + h) + 2\cos(\alpha + 2h) + 3\cos(\alpha + 3h) + \ldots + n\cos(\alpha + nh)$.

2) $\sin(\alpha + h) + 2\sin(\alpha + 2h) + 3\sin(\alpha + 3h) + \ldots + n\sin(\alpha + nh)$.

497. Решить уравнение:

$$1 + 2\cos x + 3\cos^2 x + 4\cos^3 x + \ldots = 2.$$

* 498. Доказать тождество:

$$\sin\alpha = \alpha - 4\left(\sin^3\frac{\alpha}{3} + 3\sin^3\frac{\alpha}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3} + \ldots\right).$$

Суммировать (№ 499—502).

499. $\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + h) + \sin^2(\alpha + 2h) + \ldots + \sin^2(\alpha + nh)$.

500. $\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha + h) + \cos^2(\alpha + 2h) + \ldots + \cos^2(\alpha + nh)$.

501. 1) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots$

$$\cdots+\cos^2\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots$

$$\cdots+\sin^2\left[\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

502. $\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$

Доказать (№ 503 и 504).

503. $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots$

$$\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1.$$

504. 1) $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cdots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}.$

2) $\cos\frac{2\pi}{21}+\cos\frac{4\pi}{21}+\cos\frac{6\pi}{21}+\cdots+\cos\frac{20\pi}{21}=-\frac{1}{2}.$

Суммировать (№ 505 и 506).

505. 1) $\cos^2 x+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cdots+\cos^2 n\alpha.$

2) $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\cdots+\sin^2 n\alpha.$

506. $\cos^2\alpha+\cos^2 3\alpha+\cos^2 5\alpha+\cdots+\cos^2(2n-1)\alpha.$

507. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник $A_1 A_2 \ldots A_n$. M — произвольная точка окружности. Доказать, что

$$MA_1^2+MA_2^2+\cdots+MA_n^2=2nR^2.$$

508. Около окружности радиуса r описан правильный $2n$-угольник. Из произвольной точки окружности опущены перпендикуляры на все его стороны (или их продолжения). Доказать, что сумма квадратов этих перпендикуляров равна $3nr^2$.

509. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник $A_1 A_2 \ldots A_n$. M — произвольная точка окружности. Доказать, что

$$MA_1^4 + MA_2^4 + \cdots + MA_n^4 = 6nR^4.$$

Суммировать (№ 510—512).

510. 1) $\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+h)\cos(\beta+h) + \cos(\alpha+2h)\cos(\beta+2h) + \cdots + \cos(\alpha+nh)\cos(\beta+nh)$.

2) $\sin\alpha\sin\beta + \sin(\alpha+h)\sin(\beta+h) + \sin(\alpha+2h)\sin(\beta+2h) + \cdots + \sin(\alpha+nh)\sin(\beta+nh)$.

511. 1) $\sec\alpha\sec 2\alpha + \sec 2\alpha\sec 3\alpha + \sec 3\alpha\sec 4\alpha + \cdots + \sec(n-1)\alpha\sec n\alpha$.

2) $\csc\alpha\csc 2\alpha + \csc 2\alpha\csc 3\alpha + \csc 3\alpha\csc 4\alpha + \cdots + \csc(n-1)\alpha\csc n\alpha$.

512. $\csc\alpha\cdot\csc 3\alpha + \csc 3\alpha\cdot\csc 5\alpha + \cdots + \csc(2n-1)\alpha\cdot\csc(2n+1)\alpha$.

513. Доказать:

1) $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

2) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

514. Суммировать:

$$\frac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha+\cos 7\alpha} + \cdots + \frac{1}{\cos\alpha+\cos(2n-1)\alpha}.$$

***515.** Найти сумму всех произведений по два следующих чисел:

1) $\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 3\alpha,\ \ldots,\ \cos n\alpha$,

2) $\sin\alpha,\ \sin 2\alpha,\ \sin 3\alpha,\ \ldots,\ \sin n\alpha$.

В следующих задачах найти частную сумму ряда ($s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$), доказать сходимость ряда и найти его полную сумму (№ 516—520).

516. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \ldots$

517. $\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{a} + 2a\right) + \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{a} + 6a\right) + \ldots$

$$\ldots + \operatorname{arcctg}\left[\frac{1}{a} + n(n+1)a\right] + \ldots$$

518. $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7 + \ldots + \operatorname{arcctg}(n^2 + n + 1) + \ldots$

519. $\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2 + 1 \cdot 2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2 + 2 \cdot 3} + \ldots$

$$\ldots + \operatorname{arctg}\frac{x}{x^2 + n(n+1)} + \ldots$$

520. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{11} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{2n}{n^4 + n^2 + 2} + \ldots$

521. Вычислить (точно):

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}.$$

Свернуть произведения (№ 522—524).

522. $(2\cos\alpha - 1)(2\cos 2\alpha - 1)\ \ldots\ (2\cos 2^{n-1}\alpha - 1)$.

523. $\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{\beta}{4}\right)\ldots$

$$\ldots\left(\cos\frac{\alpha}{2^n} + \cos\frac{\beta}{2^n}\right).$$

524. $(1 + \sec 2\alpha)(1 + \sec 4\alpha)(1 + \sec 8\alpha)\ldots(1 + \sec 2^n\alpha)$.

§ 7. ГРАФИКИ

Построить графики (№ 525—533).

525. $y = a^{-x} \cdot \sin x \quad (a > 1)$.

526. 1) $y = \cos^n x$ при очень большом четном n.

2) $y = \cos^n x$ при очень большом нечетном n.

527. 1) $y = \operatorname{tg}^n x$ при очень большом четном n.

2) $y = \operatorname{tg}^n x$ при очень большом нечетном n.

528. 1) $y = \sqrt[n]{\cos x}$ при очень большом четном n.

2) $y = \sqrt[n]{\cos x}$ при очень большом нечетном n.

529. $y = \sqrt[n]{\sin x}$, при очень большом нечетном n.

530. $y = \lg \cos x$.

531. $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$.

532. 1) $y = |\operatorname{tg} x|$,

2) $y = -|\sin x|$,

3) $y = \frac{1}{2}(\sin x + |\sin x|)$.

533. $y = E(\sin x)$*.

§ 8. НЕРАВЕНСТВА

Доказать неравенства (534 и 535).

534. $|\sin \alpha \cos \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$.

535. $\sqrt{\cos \varphi} < \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$.

*536. Доказать, что выражение $\frac{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}{x^2 - 2x\cos\beta + 1}$ ($|\cos\beta| \neq 1$) при любых действительных значениях x заключено между $\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}$ и $\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\beta}$ (крайние значения тоже достижимы).

Доказать, что углы всякого треугольника удовлетворяют неравенствам (№ 537—540):

537. $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

538. $\sin A + \sin B + \sin C \geqslant \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$.

539. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

---

* См. сноску на стр. 68.

540. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{4}$.

Решить неравенства (№ 541—547).

541. $\sin 2x > \cos x$.

542. $\sin x+\sqrt{3}\cos x<0$.

543. $\sqrt{3\sin x+1}>4\sin x+1$.

544. $\sqrt{3-4\cos^2 x}>3\sin x+1$.

545. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}>2\cos x$.

546. $\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1}>0$.

547. $\frac{\sin^2 x-3\sin x+1}{2\sin^2 x-\sin x-1}>1$.

§ 9. ПОВЕДЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*548. Найти наименьшее значение функции $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ на интервале $0<x<\frac{\pi}{2}$.

549. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=a\sin x+b\cos x$ $(a>0,\ b>0)$.

550. Найти экстремумы функции $y=2\cos^2 x-2\cos x-1$ и исследовать поведение этой функции при возрастании x от 0 до π.

Следующие функции исследовать на возрастание и убывание (№ 551—553).

551. $y=2\cos^2 x-5\cos x+2$.

552. $y=\sin^2 x+\sin x$.

553. $y=\sin^2 x-5\sin x+6$.

Найти наибольшие значения функций (№ 554 и 555).

554. $y=\sin x+\sin(x-\alpha)$.

555. $y=\sin x\cos(x+\alpha)$.

556. Найти наименьшее значение функции $y=a\operatorname{tg}x+b\operatorname{ctg}x$ $(a>0,\ b>0)$ на интервале $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

*557. Найти экстремумы функции $y=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}x$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ на интервале $(0,\ \pi)$.

558. Исследовать знак выражения $\sin(\sin x)$ при $0<x\leqslant 2\pi$.

559. В каких границах заключены выражения:

1) $\sin(\cos x)$, 2) $\cos(\sin x)$, 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{ctg}x)$?

560. В данный круг вписать угол данной величины так, чтобы сумма образующих его хорд была наибольшей.

561. Вершина треугольника находится в центре круга, основанием служит хорда этого круга. Каков должен быть угол при вершине, чтобы площадь была наибольшей?

562. Диагонали параллелограмма даны. При каком угле между ними площадь параллелограмма будет наибольшей?

§ 10. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Найти пределы (№ 563—607).

563. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}2x}$.

564. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^3 x}$.

565. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}{x-\alpha}$.

566. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$.

567. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}$.

568. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}$.

569. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}x-1}$.

570. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

571. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{1-\operatorname{tg}x}$.

572. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

573. $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin x}$.

574. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi-2x}$.

575. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$.

576. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{2\cos x-1}$.

577. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}$.

578. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\sec x}$.

579. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec 2x+1}{\cos x}$.

580. 1) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x}$.

581. $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\sin^2 x-\sin^2\alpha}{\sin(x-\alpha)}$.

582. $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\cos a x-\cos a\alpha}{\alpha^2-x^2}$.

583. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

584. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^2 x-\frac{1}{2}}$.

585. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

586. $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}(x-\alpha)}$.

587. $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\cos^2 x-\cos^2\alpha}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}$.

588. $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{\sin^3 x-\sin^3\alpha}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\alpha}$.

589. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$.

590. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} x}$.

591. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x+\csc x-1}{\operatorname{ctg} x-\csc x+1}$.

592. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin p x-\cos p x}$

593. $\lim\limits_{x\to\operatorname{arctg}3} \frac{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3}{\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3}$

594. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x-2}{\sin x-\cos x}$.

595. $\lim\limits_{x\to a} \frac{a\sin x-x\sin a}{a\cos x-x\cos a}$.

596. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sin\frac{x}{n}\right)$.

597. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2^x\sin\frac{a}{2^x}\right)$.

598. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.

599. $\lim\limits_{x\to 0}(\csc x-\operatorname{ctg} x)$.

600. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\sin x-\cos x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$.

601. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1-\sin x)\operatorname{tg}^2 x]$.

602. $\lim\limits_{x\to a}\left[(a-x)\sec\frac{\pi x}{2a}\right]$.

603. $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\frac{a-x}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right)$.

604. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} a}{x-a}$.

605. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} a}{\arcsin x-\arcsin a}$.

606. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{arctg} kx-\operatorname{arctg} ka}{\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} a}$.

607. $\lim\limits_{x\to a}\left(\arccos\frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right)$.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЕ ТАБЛИЦ

608. 1) Доказать формулы Симпсона:

$$\cos(n+1)\alpha=2\cos n\alpha-\cos(n-1)\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha,$$

$$\sin(n+1)\alpha=2\sin n\alpha-\sin(n-1)\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha.$$

2) Сформулировать план, как, пользуясь формулами Симпсона, составлять таблицы косинусов и синусов.

609. 1) Доказать формулы:

$$\cos(30^\circ-h)-\cos(30^\circ+h)=\sin h,$$

$$\sin(30^\circ-h)+\sin(30^\circ+h)=\cos h.$$

2) Сформулировать план, как, пользуясь этими формулами, продолжать после 30° таблицы косинусов и синусов, составленные до 30°.

610. Вычислить: 1) $\cos\sqrt{5}$, 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{tg}2)$.

611. Решить приближенно уравнения:

$$1)\ \sin x = 0{,}7\,x,\quad 2)\ \sin x = 0{,}8\,x.$$

Вычислить приближенно наименьший положительный корень следующих уравнений (№ 612 и 613).

612. $\operatorname{tg} x = 2x$. **613.** $\operatorname{tg} x = \frac{2}{x}$.

Решить приближенно следующие уравнения (№ 614–615).

614. $\sin x = x^2$. **615.** $\sin x = 4x^2 - \pi^2 - 1$.

§ 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

616. В каких случаях $\cos z$, где $z = x + iy$, есть действительное число?

617. Вычислить $\operatorname{tg}(1 - i)$.

Решить уравнения (№ 618—620).

618. 1) $\cos z = \frac{13}{5}$. 2) $\cos z = \frac{17}{8}$. 3) $\cos z = 1{,}45$.

619. 1) $\sin z = \frac{41}{9}$. 2) $\sin z = 4{,}0625$. 3) $\sin z = \frac{37}{12}$.

620. 1) $\cos z = 0{,}75\,i$. 2) $\sin z = 1{,}875\,i$.

§ 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(Обозначения см. на стр. 181)

621. Доказать, что во всяком прямоугольном треугольнике:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{2c}},\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} = \frac{a}{c+b} = \frac{c-b}{a}.$$

*622. В прямоугольном треугольнике даны a и l_c. Найти углы.

623. Решить прямоугольный треугольник: $m_a = 12$, $m_b = 7$.

624. Решить треугольник: $a = 4$, $b = 6$, $l_c = 3$.

Найти площадь треугольника (№ 625—627).

625. $a = 25$, $c = 19$, $m_a = 14$.

626. $a = 74$, $c = 57$, $m_b = 48$.

627. $m_a = 315$, $\alpha = 41^\circ 19'$, $\beta = 35^\circ 51'$ (α и β—углы, на которые медиана делит угол A).

Найти углы треугольника (№ 628—632).

628. $h_b = 14$, $m_b = 15$, $C - A = 23^\circ 52'$.

629. $h_a = 93$, $m_a = 97$, $R = 72$.

630. $a = 444{,}2$, $r = 152{,}3$, $B = 63^\circ 07'$.

631. $a = 26$, $h_b = 25$, $r = 9$.

632. $r = 6{,}1$, $R = 21{,}4$, $h_a = 3$.

633. $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Найти l_b.

634. Две окружности радиусов r и R пересекаются. Их общая хорда равна a. Вычислить площадь общей части двух кругов.

635. Сторона ромба видна из середины противоположной стороны под углом α. Определить углы ромба.

636. Найти косинусы углов треугольника, если

$$m_a : m_b : m_c = \lambda : \mu : \nu.$$

637. $R = 2$, $m_a = 1$, $b = c$. Найти (точно) A, B, C.

638. $b + c = 5$, $l_a = \frac{6}{5}$, $A = 120^\circ$. Найти (точно) a, b, c.

639. $2(b - c) = (\sqrt{5} - 1)a$, $A = 72^\circ$. Найти (точно) B, C.

640. $a + b = 11$, $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, $S = 6\sqrt{6}$. Найти (точно) a, b, c.

641. $b=3\sqrt{3}$, $a+c=3h_b$, $A=30°$. Найти (точно) a, c.

642. $h_a=8$, $h_b=6$, $m_c=5$. Найти (точно) C.

643. $4p=(3+\sqrt{5})\,a$, $A=36°$. Найти (точно) B, C.

644. $b+c=2a$, $r=\sqrt{2}$, $R=2\sqrt{2}$. Найти (точно) все стороны и углы.

645. Два равных квадрата имеют общую сторону. Их плоскости образуют двугранный угол α. Из общей вершины проведены диагонали. Найти угол между этими диагоналями.

646. Найти угол между ребром и гранью правильного тетраэдра.

647. Найти двугранный угол правильного октаэдра.

648. Минутная стрелка имеет длину 3 *см*, а часовая — $2\frac{1}{2}$ *см*. Через сколько времени после полудня в первый раз расстояние между концами стрелок составит $3\frac{1}{2}$ *см*?

649. Конус и полушар имеют общее основание. Сферическая поверхность полушара делится боковой поверхностью конуса в отношении $m:n$ (считая от основания). Найти угол наклона образующей конуса к плоскости основания. Рассмотреть случаи $m=n$ и $n=0$.

650. Два равных конуса имеют общую вершину и касаются друг друга по образующей. Один из них неподвижен, а другой катится по нему. Высота катящегося конуса описывает коническую поверхность, площадь которой равна площади боковой поверхности каждого из данных конусов. Найти угол в осевом сечении каждого из данных конусов.

651. Треугольник, углы которого суть A, B, C, вращается поочередно около каждой стороны. Найти отношения объемов тел вращения.

652. Круговой сектор вращается около своего крайнего радиуса. Объем полученного тела вращения составляет $\frac{1}{4}$ объема шара того же радиуса. Определить угол сектора.

Доказать, что во всяком треугольнике имеют место следующие соотношения (№ 653—665).

653. $2R\sqrt[3]{h_a h_b h_c}=(abc)^{\frac{2}{3}}$.

654. $S=aR\sin B\sin C$ и т. д.*.

655. $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

656. $pS=abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

657. $S^2=(p-a)\,abc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ и т. д.*.

658. $S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

659. $S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2\sin A\sin B\sin C}=$

$$=\frac{1}{4}\sqrt[3]{2a^2b^2c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}.$$

660. $S(\sin A+\sin B+\sin C)=2pR\sin A\sin B\sin C=$

$$=p^2(\cos A+\cos B+\cos C-1).$$

661. $Rr=\frac{abc}{4p}=\frac{1}{4}S\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$.

662. $p=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

663. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

664. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+$

$$+c(\sin A-\sin B)=0.$$

665. $1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a}{p}$ и т. д. *.

---

* Слова «и т. д.» обозначают, что можно производить циклическую перестановку. Например, в задаче № 654 они заменяют формулы:

$$S=bR\sin C\sin A \text{ и } S=cR\sin A\sin B.$$

666. Доказать, что стороны всякого треугольника являются корнями уравнения:

$$x^3 - 2px^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0.$$

Доказать (№ 667—670).

667. 1) Если $S = p(p-a)$, то треугольник — прямоугольный.

2) Если $S = (p-b)(p-c)$, то треугольник — прямоугольный.

668. Если $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$, то треугольник — прямоугольный.

669. Если расстояние между центром описанного круга и ортоцентром равно половине одной из сторон, то треугольник — прямоугольный.

670. Если $\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{a+b}{c}$, то треугольник — прямоугольный.

По данному соотношению между элементами треугольника определить вид треугольника (№ 671—674).

671. $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$.

672. $\sin A + \cos A = \sin B + \cos B$.

673. $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$.

674. $c = \frac{a+b}{2}$, $C = \frac{A+B}{2}$.

Доказать (№ 675—678).

675. Если $A = 60°$, то $a = \sqrt{\frac{b^3+c^3}{b+c}}$.

676. 1) Если отношения сторон треугольника рациональны, то косинусы его углов имеют рациональные значения.

2) Если стороны и площадь треугольника рациональны, то все тригонометрические функции его углов имеют рациональные значения.

677. Если синусы углов треугольника образуют арифметическую прогрессию, то произведение тангенса половины меньшего угла на тангенс половины большего равно $\frac{1}{3}$.

678. Углы и стороны разностороннего треугольника не могут одновременно образовывать арифметические прогрессии.

§ 14. СФЕРИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

(Обозначения см. на стр. 183)

Решить прямоугольные сферические треугольники (№ 679—684).

679. 1) $a=66^\circ 48'$, $b=119^\circ 31'$.

2) $a=118^\circ 41'$, $b=150^\circ 31'$.

680. 1) $a=47^\circ 39'$, $c=80^\circ 00'$.

2) $a=123^\circ 37'$, $c=159^\circ 00'$.

681. 1) $a=136^\circ 49'$, $A=99^\circ 10'$.

2) $a=134^\circ 48'$, $A=160^\circ 02'$.

682. 1) $b=118^\circ 13'$, $A=55^\circ 30'$.

2) $b=124^\circ 30'$, $A=159^\circ 18'$.

683. 1) $c=164^\circ 13'$, $A=47^\circ 39'$.

2) $c=109^\circ 31'$, $A=138^\circ 25'$.

684. 1) $A=15^\circ 49'$, $B=102^\circ 02'$.

2) $A=149^\circ 12'$, $B=123^\circ 06'$.

Решить прямосторонние сферические треугольники (№ 685—690).

685. $a=48^\circ 14'$, $b=75^\circ 57'$.

686. $a=105^\circ$, $B=76^\circ$.

687. $a=119^\circ 26'$, $C=69^\circ 05'$.

688. 1) $a = 114^\circ 49'$, $A = 136^\circ 29'$.

2) $a = 38^\circ 27'$, $A = 107^\circ 06'$.

689. $A = 59^\circ 58'$, $B = 140^\circ 01'$.

690. 1) $A = 127^\circ 39'$, $C = 98^\circ 25'$.

2) $A = 64^\circ 56'$, $C = 58^\circ 12'$.

Решить сферические треугольники (№ 691—696).

691. 1) $a = 59^\circ 46'$, $b = 83^\circ 18'$, $c = 96^\circ 04'$.

2) $a = 119^\circ 37'$, $b = 158^\circ 11'$, $c = 48^\circ 28'$.

692. 1) $A = 116^\circ 08'$, $B = 60^\circ 07'$, $C = 69^\circ 45'$.

2) $A = 128^\circ 30'$, $B = 119^\circ 15'$, $C = 125^\circ 02'$.

693. 1) $a = 104^\circ 23'$, $b = 67^\circ 04'$, $C = 36^\circ 18'$.

2) $a = 108^\circ 14'$, $b = 60^\circ 28'$, $C = 98^\circ 32'$.

694. 1) $A = 39^\circ 04'$, $B = 57^\circ 46'$, $c = 100^\circ 00'$.

2) $A = 107^\circ 46'$, $B = 69^\circ 42'$, $c = 40^\circ 11'$.

695. 1) $a = 112^\circ 40'$, $b = 58^\circ 28'$, $A = 98^\circ 23'$.

2) $a = 121^\circ 05'$, $b = 66^\circ 25'$, $A = 138^\circ 17'$.

696. 1) $A = 54^\circ 42'$, $B = 81^\circ 27'$, $a = 52^\circ 35'$.

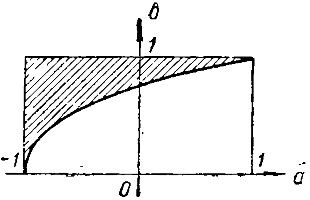
2) $A = 39^\circ 37'$, $B = 69^\circ 25'$, $a = 26^\circ 50'$.

ОТВЕТЫ

6. $1-(2+\sqrt{2})\left(1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$. 10. 2) См. формулу (V. 53).

14. $2x\sqrt{1-x^2}$. 15. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. 16. $\dfrac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}$. 21. $x=-\dfrac{\sqrt{1-9a^2}}{3a}$.

Задача возможна при $0 < a \leqslant \dfrac{1}{3}$. 22. 2) $x=a(2b^2-1)+$
$+2b\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$. Задача возможна при условиях $-1 \leqslant a \leqslant$
$2b^2-1$, $0 \leqslant b \leqslant 1$ (см. черт. 20). 36. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.



Черт. 20

38. 1) $4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

2) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. 40. $x_1=$
$=-p\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$, $x_2=-p\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$,

где $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{q}}{|p|}$, $0<\varphi<90^\circ$.

41. $4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sin\left(45^\circ+\dfrac{\varphi}{2}\right)$, где $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}\cos\alpha$, $0<\varphi<180^\circ$.

44. $\dfrac{1}{4}[\sin 2(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha-\sin 2\beta]$.

47. 1) См. формулу (IX. 2), 2) См. формулу (IX. 11).

48. $\dfrac{1}{8}(1-\cos 4\alpha)$. 49. 2) $x=45^\circ(4k-1)+(-1)^k\,12^\circ 15'$, 3) $x=$
$=30^\circ[6k-2+(-1)^k]$. 50. a) $x=45^\circ(4k-1)$, b) $x=180^\circ k+64^\circ 59'$.

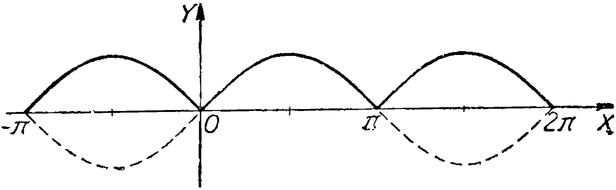
52. $x = 30° (3k \pm 1)$. 53. $x = 22°30' (4k \pm 1)$. 54. a) $x = 45° (4k+1)$, b) $x = 30° [6k + (-1)^k]$. 56. a) $x = 180° (2k + 1)$, b) $x = 60° [6k + (-1)^k]$. 58. a) $x = 45° (2k + 1)$, b) $x = 30° (6k \pm 1)$. 60. $x = 7° 30' (4k - 1)$. 62. a) $x = 90° (2k + 1)$, b) $x = 360°k$, c) $x = 36° (2k + 1)$. 63. a) $x = 120° (3k \pm 1)$, b) $x = 22° 30' (4k + 1)$.

64. $x = k\pi$. *Указание.* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ — взаимно обратные величины. Их сумма равна 2 в том и только в том случае, когда каждая из них равна 1. Можно решить задачу и без этого соображения, но несколько длиннее. 68. $x = 90°(4k+1)$. *Указание.* Сумма двух синусов равна 2 в том и только в том случае, когда каждый из них равен 1. 70. Если $a \neq 180° (2n + 1)$, то $x = 30° [6k + (-1)^k] - \frac{a}{2}$; если $a = 180°(2n + 1)$, то уравнение удовлетворяется при всяком x. 71. Если $a \neq 45°(2n + 1)$, то $x = 45° (2k + 1)$; если $a = 45° (2n + 1)$, то уравнение решений (действительных) не имеет. 74. При $-\infty < a \leqslant -5$ уравнение имеет два решения: a) $\sec x = \frac{3 + \sqrt{9 - 8a}}{4}$, b) $\sec x = \frac{3 - \sqrt{9 - 8a}}{4}$; при $-5 < a \leqslant 1$ — только первое из них; при $1 < a < \infty$ решений нет. 80. $x = \pi k + (-1)^{k+1} \cdot 1{,}1871$. 82. a) $x = \frac{(4m + 1) \pi \pm \sqrt{(4m + 1)^2\pi^2 - 240}}{12}$, где m — любое целое число, кроме 1 и 0,

b) $x = \frac{-(4n + 1) \pi \pm \sqrt{(4n + 1)^2 \pi^2 + 240}}{12}$, где n — любое целое число. 83. $x = 1 + \frac{\log\frac{\pi}{3} + \log (3k + 1)}{\log 2}$, где логарифмы берутся при любом (одинаковом) основании, k — любое целое неотрицательное число. Прибл. $x = 1{,}06653 + 3{,}32192 \lg (3k + 1)$, где $\lg$ — десятичный логарифм. 84. $x = \frac{1 + (4k + 1) \pi \pm \sqrt{1 + 2 (4k + 1) \pi}}{2}$, где k — любое целое неотрицательное число. 88. $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 90. $x = \frac{1}{2}$, $n = 1$. 91. $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. 94. $x_1 = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $x_2 = \operatorname{ctg}\frac{a}{2}$.

95. $x_1 = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$, $x_2 = -\operatorname{ctg}\frac{a}{2}$. 98. a) $x = 360°m$, $y = 360° n$, b) $x = 120° (3m \pm 1)$, $y = 120° (3n \mp 1)$, c) $x = 30° (6m + 1) \pm \varphi$, $y = 30° (6n + 1) \mp \varphi$, d) $x = 30° (6m - 1) \pm \varphi$, $y = 30° (6n - 1) \mp \varphi$. В решениях b), c) и d) знаки оба верхние или оба нижние, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4} \approx 113° 20'$. 99. $x = 90° (4k + 1)$, $y = 180° l +$

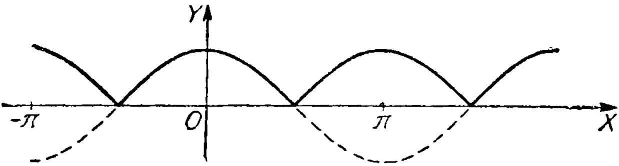
$+(-1)^l \varphi$, где $\varphi = \arcsin \dfrac{\log 2}{\log 3} \approx 39° 07'$. Логарифмы берутся при любом (одинаковом) основании. **100.** $x \approx 360k \pm 56° 19'$, $y \approx 360l \pm \pm 86° 49'$, $z \approx 360°m \pm 36°52'$. Знаки либо все верхние и $k + l + m = 0$, либо все нижние и $k + l + m = 1$. **101.** $4a^2(1 - a^2) = b^2$.



Черт. 21

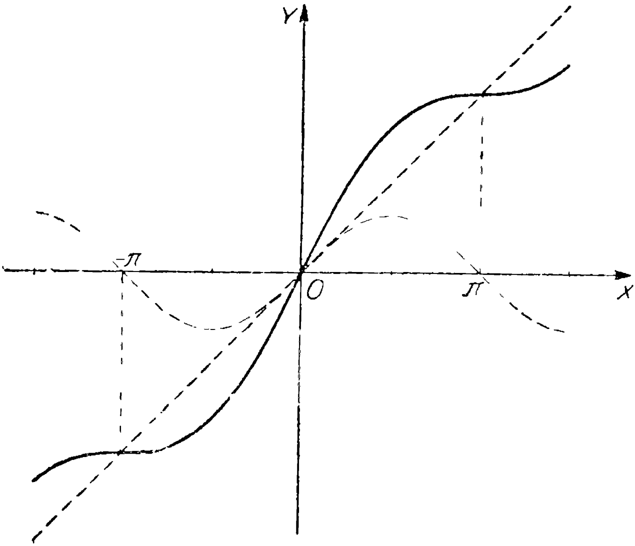
102. $a^2(2 - a^2) = b^2$. **103.** $\operatorname{tg}^2\sqrt{m^2 + n^2} = \dfrac{m^2}{n^2}$. **105.** $b - a = \cos \alpha$.

108. a) $x = \dfrac{360° k}{n}$, где k — любое целое число, не кратное n, b) $x = \dfrac{90° (4k + 1)}{n + 1}$. **109.** $\dfrac{\sin\left[\alpha + \dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right]}{\sin \dfrac{\pi}{2n}}$.

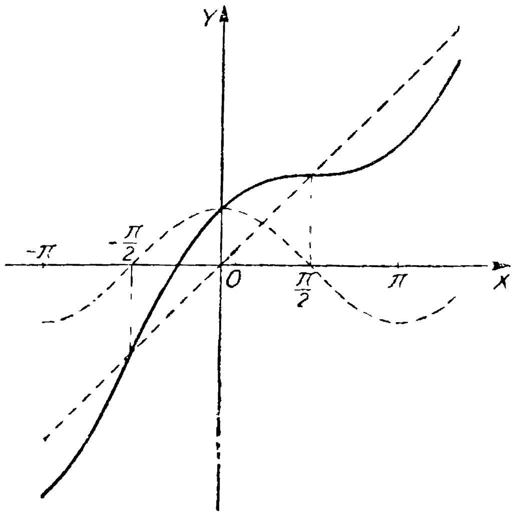


Черт. 22

113. $\dfrac{\sin \dfrac{n\pi}{2k} \cos \dfrac{(n+1)\pi}{2k}}{\sin \dfrac{\pi}{2k}}$ $(k \neq 0)$. **115.** $\dfrac{\sin 2^n \alpha}{2^n \sin \alpha}$. *Указание.* См. решение задачи № 45. **116.** $\dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$. *Указание.* См. решение задачи № 45. **117.** 1) См. чертеж 21. Пунктиром показана синусоида $y = \sin x$. 2) См. чертеж 22. Пунктиром показана косинусоида $y = \cos x$. **118.** 1) См. чертеж 23. Пунктиром показаны прямая $y = x$ и синусоида $y = \sin x$. 2) См. чертеж 24. Пунктиром показаны прямая $y = x$

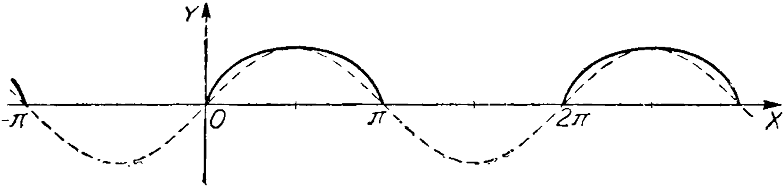


Черт. 23



Черт. 24

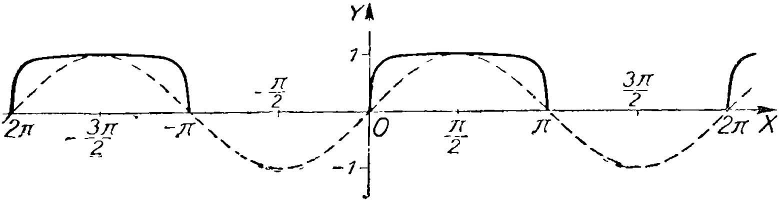
и косинусоида $y = \cos x$. **122.** См. чертеж 25. Пунктиром показана синусоида $y = \sin x$. **123.** См. чертеж 26. Пунктиром показана синусоида $y = \sin x$. **124.** См. чертеж 27. **125.** График состоит из отдельных точек оси абсцисс, для которых $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$ (см. чертеж 28). **129.** a) $180^\circ \cdot 2k - \varphi_1 < x < 180^\circ \cdot 2k + \varphi_2$, b) $180^\circ (2k+1) -$



Черт. 25

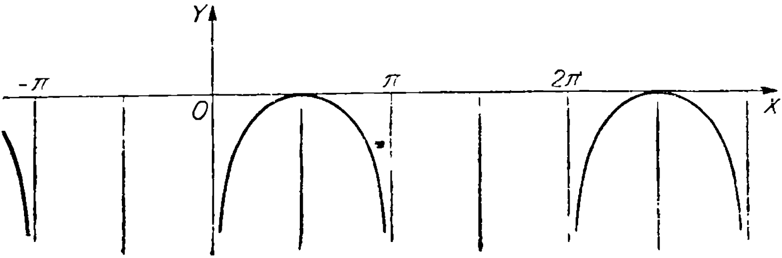
$- \varphi_2 < x < 180^\circ (2k+1) + \varphi_1$, где $\varphi_1 = \arcsin \frac{\sqrt{29}+3}{10} \approx 56^\circ 59'$,

$\varphi_2 = \arcsin \frac{\sqrt{29}-3}{10} \approx 13^\circ 48'$. **133.** При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$



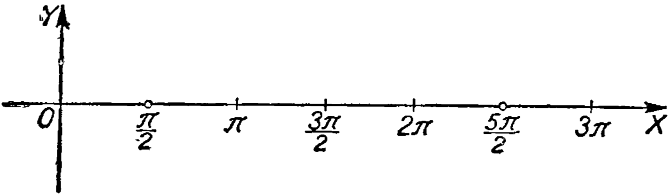
Черт. 26

y возрастает от 3 до 13; при возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ y убывает от 13 до—3; при возрастании x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π y возрастает от —3 до 3.



Черт. 27

Далее y изменяется периодически. **137.** Наибольшее значение угла A достигается при $b=c$ и равно $2\arcsin\frac{a}{m}$. **140.** $-\sin\alpha$. **141.** $\frac{1}{2}$. **142.** $\frac{2}{m^2}$. **144.** α. **145.** 2) 0,74562, 3) 0,80268, 4) 0,21711.



Черт. 28

148. $x=0{,}8603$ (с недостатком; погрешность меньше 0,00005). **149.** 1) $\cos i=\operatorname{ch}1\approx1{,}54308$, 2) $\sin i=i\operatorname{sh}1\approx1{,}17520i$. **150.** $9{,}15450-4{,}16891i$. **151.** 2) $z=\frac{\pi}{2}(4k+1)\pm i\ln 7$. **152.** 1) $z=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-i\ln 5\right)$, 2) $z=k\pi+(-1)^k i\ln(2+\sqrt{3})$. **155.** $a=4{,}1082$, $b=2{,}8766$, $c=5{,}0152$. **158.** $a=60{,}6114$, $b=97{,}8877$, $c=62{,}5226$, $C=38°\,08'$. **159.** $r=\frac{s\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\alpha}$. **160.** 166 *см*. **163.** $\sin A=\frac{\lambda}{2\nu}$, $\sin B=\frac{\mu}{2\nu}$. **166.** $a\sin\alpha\cdot\sin\beta$. **167.** $70°\,32'$. **168.** Холодные пояса — $8{,}3\%$, умеренные пояса — $51{,}9\%$, жаркий пояс — $39{,}8\%$.

170. $b=153°\,48'$, $A=55°\,32'$, $B=137°\,42'$. **171.** Два решения: $b_1=32°23'$, $c_1=48°36'$, $B_1=45°33'$, $b_2=147°37'$, $c_2=131°24'$, $B_2=134°27'$. **172.** $a=35°\,35'$, $c=50°\,03'$, $B=53°\,12'$. **173.** $a=49°\,33'$, $b=46°\,02'$, $c=63°\,13'$. **175.** $b=78°\,14'$, $A=35°\,01'$, $C=106°\,14'$. **176.** Два решения: $b_1=125°\,57'$, $B_1=133°\,33'$, $C_1=63°\,33'$; $b_2=54°\,03'$, $B_2=46°\,27'$, $C_2=116°\,27'$. **177.** $a=62°\,49'$, $b=46°\,31'$, $C=119°\,09'$. **179.** $a=30°\,05'$, $b=27°\,32'$, $c=32°16'$. **180.** $c=37°\,58'$, $A=83°\,43'$, $B=54°\,16'$. **181.** $c=60°\,46'$, $B=42°\,42'$, $C=97°\,37'$. **182.** 2) 5797 *км*. **183.** В Москве $53°\,32'$, в Хабаровске $42°\,47'$. **209.** *Указание*. По формуле (VII. 20) имеем: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha$, $2\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha=-4\operatorname{ctg}4\alpha$, $4\operatorname{tg}4\alpha-4\operatorname{ctg}4\alpha=-8\operatorname{ctg}8\alpha$. Складывая эти тождества, получим то, что требуется доказать. **211.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3m-1}{m-3}}\pm2\sqrt{\frac{m-1}{m-3}}$. Комбинации знаков любые. Задача возможна при $-\infty < m < \frac{1}{3}$ и при $3 < m < \infty$. **212.** a) ± 2, b) $\pm\frac{1}{2}$.

214. 1) $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\alpha = \frac{n}{1!}\cos\alpha - \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}\cos^3\alpha +$

$+ \frac{(n+3)(n+1)n(n-1)(n-3)}{5!}\cos^5\alpha - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1}\cos^n\alpha.$

При $n = 3$ и $n = 5$ см. формулы (V. 45) и (V. 46),

2) $\cos n\alpha = 1 - \frac{n\cdot n}{2!}\sin^2\alpha + \frac{(n+2)\,n\cdot n\,(n-2)}{4!}\sin^4\alpha -$

$- \frac{(n+4)(n+2)\,n\cdot n\,(n-2)(n-4)}{6!}\sin^6\alpha + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1}\sin^n\alpha.$

При $n = 2$, $n = 4$ и $n = 6$ см. формулы (V. 36), (V. 37) и (V. 38),

3) $(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\alpha = 1 - \frac{n\cdot n}{2!}\cos^2\alpha + \frac{(n+2)\,n\cdot n\,(n-2)}{4!}\cos^4\alpha -$

$- \frac{(n+4)(n+2)\,n\cdot n\,(n-2)(n-4)}{6!}\cos^6\alpha + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1}\cos^n\alpha.$

При $n = 2$, $n = 4$ и $n = 6$ см. формулы (V. 31), (V. 32) и (V. 33).

215. $\operatorname{tg} n\alpha = \frac{C_n^1\cdot\operatorname{tg}\alpha - C_n^3\operatorname{tg}^3\alpha + C_n^5\operatorname{tg}^5\alpha - \cdots}{1 - C_n^2\operatorname{tg}^2\alpha + C_n^4\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots}$. Последние члены числителя и знаменателя содержат $\operatorname{tg}\alpha$ в n-й и $(n-1)$-й степенях. **216.** 1) $4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$. *Указание.* Воспользоваться формулой (V. 45). 2) $4x^3 - 3x + \sin\alpha = 0$. *Указание.* Воспользоваться формулой (V. 22). 3) $x^3 - 3x^2\operatorname{tg}\alpha - 3x + \operatorname{tg}\alpha = 0$. *Указание.* Воспользоваться формулой (V. 56). **222.** q. **223.** Может в одном из трех случаев: a) $\alpha = 360° k$, b) $\beta = 360° k$, c) $\alpha + \beta = 360° k$. **224.** *Указание.* Обозначим для краткости: $\operatorname{tg}\alpha = u$, $\operatorname{tg}\beta = v$, $\operatorname{tg}\gamma = w$. По условию $u + v + w = a$, $uvw = a$, $uv + vw + wu = 1$ (здесь через a обозначено общее значение $u + v + w$ и uvw). Согласно формулам Виета u, v и w суть корни уравнения $s^3 - as^2 + s - a = 0$. Остается доказать, что это уравнение не имеет трех действительных корней. **225.** *Указание.* Эту задачу можно свести к предыдущей. **230.** $\sin 42° = \cos 48° =$ $= \frac{1}{8}(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1)$, $\cos 42° = \sin 48° = \frac{1}{8}[\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)]$. *Указание.* $42° = 60° - 18°$; $\sin 18° = \frac{a_{10}}{2R}$.

231. $\sin 33° = \cos 57° = \frac{1}{16}[(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)]$; $\cos 33° = \sin 57° =$

$= \frac{1}{16}\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right].$

232. $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$;

$\cos 27^\circ = \sin 63^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$. 233. $\sin 12^\circ = \cos 78^\circ = \frac{1}{8}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right]$; $\cos 12^\circ = \sin 78^\circ = \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$. 234. $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$. 235. $22^\circ 30'$. 236. $22^\circ 30'$. 237. $22^\circ 30'$.

238. 15°. 239. 75°. 240. 15°. 241. 54°. 242. 18°. 243. 18°. 244. 36°.

249. $\sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{34}}$. 250. $-\frac{3}{4}$. 251. $2x^2-1$. 252. $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

265. $x = 2a\sqrt{1-a^2}$. Задача возможна при $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

266. $x = 1-2a^2$. Задача возможна при $0 \leqslant a \leqslant 1$. 267. $x = 4a(1-2a^2)\sqrt{1-a^2}$. Задача возможна при $-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. 268. $x = \frac{1-a^2}{2a}$. Задача возможна при $a > 0$.

269. $x = \frac{4a(1-a^2)}{1-6a^2+a^4}$. Задача возможна при $-(\sqrt{2}-1) < a < \sqrt{2}-1$.

270. $x = \frac{1}{2a}$. Задача возможна при $a > 0$. 271. $x = \sqrt{1-4a^2}$. Задача возможна при $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$. 272. $x = \sqrt{1-a^2}$. Задача возможна при $-1 \leqslant a \leqslant 0$. 273. $x = \frac{1+3a}{1-3a}$. Задача возможна при $-\infty < a < \frac{1}{3}$.

274. $x = \frac{(4-a^2)\sqrt{a^2-1}}{a^3}$. Задача возможна при $1 \leqslant a \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

275. 1) $x = \frac{a(3-4a^2)}{(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}}$. Задача возможна при $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

2) $x = \frac{a(3-4a^2)}{(1-4a^2)\sqrt{1-a^2}}$. Задача возможна при $\frac{1}{2} < a < 1$.

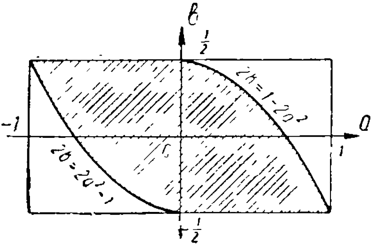
276. $x = 2a\sqrt{(1-a^2)(1-4b^2)} + 2b(1-2a^2)$. Задача возможна при условиях: $-\sqrt{\frac{1+2b}{2}} \leqslant a \leqslant \sqrt{\frac{1-2b}{2}}$, $-\frac{1}{2} \leqslant b \leqslant \frac{1}{2}$ (черт. 29).

320. *Указание*. Преобразовать данное условие к виду:

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=0.$$

331. 1) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$, 2) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

332. 1) $4\cos 2\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$,



Черт. 29

2) $4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$, 3) $\operatorname{tg}2\alpha$.

333. $4\sin 5\alpha\cdot\cos^2\alpha$. **334.** $2\sin^2 1^\circ$. **335.** $\frac{4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

336. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha$. **337.** 1) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$,

2) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\beta}{2}\right)$. **338.** 1) $-2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)$,

2) $2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)$. **339.** 1) $4\sin(\alpha+h)\cos\left(30^\circ+\frac{h}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{h}{2}\right)$,

2) $4\cos(\alpha+h)\cos\left(30^\circ+\frac{h}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{h}{2}\right)$. 3) $\operatorname{tg}(\alpha+h)$.

340. $\operatorname{ctg}22^\circ\operatorname{ctg}23^\circ$. **341.** 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$,

2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$. **342.** $2\sin\alpha$.

343. $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. **344.** $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$.

345. $\sin\alpha$. **346.** $\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, $-90^\circ<\varphi<90^\circ$.

347. $\frac{|a|}{\cos\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{b}{a}\right|$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. **348.** $2|a|\sin(45^\circ+\varphi)$, где $\cos 2\varphi=\left(\frac{b}{a}\right)^2$, $0\leqslant\varphi\leqslant 45^\circ$. **349.** 1) $\frac{2a\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, $0<\varphi<90^\circ$. Данное выражение представляет сумму гипотенузы и катета, заключающих угол φ. 2) $2a\sin^2\frac{\varphi}{2}$, где $\sin\varphi=\frac{b}{a}$, $0<\varphi<90^\circ$. Данное выражение представляет разность гипотенузы и катета, заключающих угол φ. **350.** $2\sqrt{a}\sin\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)$, где $\cos\varphi=\frac{b}{a}$, $0<\varphi<90^\circ$. **351.** $\frac{1}{4}[\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2(\alpha+\beta)-1]$. **352.** 1) См. формулу (VIII. 6), 2) См. формулу (VIII. 7). **353.** $\frac{3}{16}$. **354.** 1) См. формулу (IX. 7), 2) См. формулу (IX. 16). **355.** $\frac{1}{32}(3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)$.
356. $\frac{1}{16}(2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)$. **357.** 1) См. формулы (IX. 19) и (IX.20), 2) См. формулы (IX. 21) и (IX. 22). **358.** 1) a) $x=90^\circ\cdot 4k+8^\circ 43'$, b) $x=90^\circ(4k+1)-8^\circ 43'$, 2) a) $x=360^\circ k+50^\circ 26'$, b) $x=360^\circ k-18^\circ 33'$. **359.** $\cos x$ определяется из биквадратного уравнения: $c\cdot\cos^4 x+(b-a-c)\cos^2 x+a=0$. **360.** 1) $\operatorname{tg}x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4(a-d)(c-d)}}{2(a-d)}$, 2) a) $x=180^\circ k+\varphi$, где $\varphi=\operatorname{arctg}3\approx 71^\circ 34'$; b) $x=180^\circ k-\psi$, где $\psi=\operatorname{arctg}6\approx 80^\circ 32'$. **361.** a) $x=90^\circ(2k+1)$, b) $x=40^\circ(3k\pm 1)$. **362.** $x=180^\circ k+(-1)^k\varphi-\frac{\alpha+\beta}{2}$, где $\varphi=\arcsin\frac{m}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

363. a) $x = 9^\circ(8k-1)$, b) $x = 1^\circ 48'(8k+1)$. 364. $x = 22^\circ 30' m$, где m — любое целое число, не кратное 8, т. е. $m \neq 8k$. 365. $x = 30^\circ(6k \pm 1)$. 366. a) $x = 120^\circ(3k \pm 1)$, b) $x = 360^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} \approx 38^\circ 40'$. 367. a) $x = \frac{360^\circ k}{13}$, b) $x = \frac{360^\circ k}{7}$.

368. a) $x = 90^\circ k$, b) $x = 180^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 44'$.

369. a) $x = 180^\circ(4k \pm 1)$, b) $x = 60^\circ(6k \pm 1)$. 370. 1) a) $x = 90^\circ \cdot 4k$, b) $x = 90^\circ(4k+1)$, 2) a) $x = 45\ (4k-1)$, b) $x = 90^\circ \cdot 4k$, c) $x = 90^\circ(4k+1)$. 371. $x = 180^\circ k + (-1)^k \varphi$, где $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{65}-1}{8} \approx 61^\circ 59'$. 372. a) $x = 180^\circ k$, b) $x = 180^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{35}}{7} \approx 40^\circ 12'$. 373. a) $x = 180^\circ k$, b) $x = 180^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7} \approx 20^\circ 42'$. 374. a) $x = 360^\circ k$, b) $x = 360^\circ k \pm 70^\circ 32'$. 375. $x = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 51^\circ 50'$. 376. 1) a) $x = 90^\circ(4k+2) - \varphi$, b) $x = 90^\circ(4k+3) + \varphi$, где $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 19^\circ 05'$. 2) a) $x = 90^\circ(4k+2) - \psi$, b) $x = 90^\circ(4k+3) + \psi$, где $\psi = \frac{1}{2} \arcsin(4\sqrt{5}-8) \approx 35^\circ 23'$. 377. a) $x = 180^\circ k$; b) $x = 45^\circ(4k+1)$. 378. $x = 90^\circ k + 31^\circ 43'$. 379. a) $x = 45^\circ(4k+1)$, b) $x = 90^\circ(2k+1)$. 380. $x = 180^\circ k$. 381. $x = 45^\circ(2k+1)$. 382. $x = 22^\circ 30'(4k+1)$.

Указание. Левую часть можно заменить через $\frac{3}{4} \sin 4x$ (см. задачу № 9).

383. a) $x = 30^\circ[6k + (-1)^k]$, b) $x = 18^\circ[10k + (-1)^k]$, c) $x = 18^\circ[10k + 3(-1)^{k+1}]$. 384. $\cos(x+1) = \frac{\sin \alpha}{2\cos\frac{1}{2}} \approx 0{,}56975 \sin \alpha$.

385. При $\alpha \neq 180^\circ m$ $x = 45^\circ(4k+1)$; при $\alpha = 180^\circ m$ данное уравнение превращается в тождество. 386. $\operatorname{tg} x = \frac{p \sin \alpha - q \sin \beta}{p \cos \alpha - q \cos \beta}$.

387. a) $x = \frac{90^\circ}{p}(2k+1)$, b) $x = \frac{1}{p+q}[45^\circ(4k+1) + (-1)^k \varphi]$,

где $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 20^\circ 42'$. 388. a) $x = 45^\circ (2k + 1)$, b) $x = \frac{1}{7} \cdot 30^\circ [6k + (-1)^k]$. 389. a) $x = 22^\circ 30' (2k+1)$, b) $x = 20^\circ (6k \pm 1)$.

390. 1) При $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p + q \neq 0$ уравнение имеет три серии решений: a) $x = \frac{360^\circ k}{p}$, b) $x = \frac{360^\circ k}{q}$, c) $x = \frac{180^\circ (2k + 1)}{p+q}$. Если $p \neq 0$, $q \neq 0$, $p + q = 0$, то серия c) отпадает, а серии a) и b) совпадают между собой. Если хоть одно из чисел p и q равно нулю, то данное уравнение обращается в тождество. 2) При $p \neq 0$, $q \neq 0$ и $p - q \neq 0$ уравнение имеет три серии решений: a) $x = \frac{360^\circ k}{p}$, b) $x = \frac{360^\circ k}{q}$, c) $x = \frac{180^\circ (2k + 1)}{p - q}$ При $p = q \neq 0$ серия c) отпадает, а серии a) и b) совпадают между собой. При $p \neq 0$, $q = 0$ $x = \frac{180^\circ k}{p}$ При $p = 0$ уравнение обращается в тождество.

391. $\cos x = \pm \sqrt{\frac{3\cos^2 \alpha - 1}{3\cos 2\alpha}}$. Задача возможна в следующих случаях: a) $90^\circ \cdot 2k - \varphi \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ \cdot 2k + \varphi$, b) $90^\circ (2k + 1) - \psi \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ \cdot (2k + 1) + \psi$, где $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 35^\circ 16'$, $\psi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54^\circ 44'$. 392. $x = 45^\circ (4k + 1) - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

393. $\sin 2x = \pm 2 \sqrt{\frac{1 - a}{3}}$. Задача возможна при $\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1$. 394 $x = 45^\circ (4k \pm 1)$. 395. $x = 360^\circ k - \alpha + 2\beta$.

396. $x = 30^\circ (3k \pm 1)$ 397. $x = 45^\circ (4k \pm 1)$. 398. a) $x = 45^\circ (8k - 1)$, b) $x = 15^\circ (8k + 3)$. 399 a) $x = 18^\circ (10k \pm 1)$. b) $x = 18^\circ (10k \pm 3)$.

400. a) $x = 360^\circ k$. b) $x = 60^\circ [6k + (-1)^k]$. 401. $\cos 2x = -\frac{4\sqrt{3} + 5}{13}$, $x = 180^\circ k \pm 78^\circ 17'$. *Указание*. При нахождении $\cos 2x$ рекомендуется воспользоваться формулой (XVII. 1). Согласно этой формуле

$$\sqrt{813 - 420\sqrt{3}} = 14\sqrt{3} - 15$$

402. a) $x = 45^\circ (4k + 1)$, b) $x = \frac{1}{7} \cdot 30^\circ [6k + (-1)^k]$. 403. $x =$

$= 90^\circ \dfrac{2k+1}{p+q}$. Предполагается, что $p+q \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. Некоторые корни могут оказаться несобственными. **404.** $x = \dfrac{3\pi}{5}(2k+1)$. **405.** $x = 360^\circ k \pm 51^\circ 50'$. **406.** Уравнение имеет только несобственные решения $x = 90^\circ(4k+1)$. Это значит, что они удовлетворяют уравнению лишь при условии, что правая часть понимается не как результат непосредственной подстановки вместо x значения $90^\circ(4k+1)$, а как $\lim\limits_{x \to 90^\circ(4k+1)} \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$. **407.** a) $x = 60^\circ k$; b) $x = 180^\circ \pm \varphi$, где $\varphi = \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 35^\circ 44'$. **408.** $x = 120^\circ k$. **409.** $x = 22^\circ 30' k$. **410.** a) $x = 20^\circ k$, b) $x = 30^\circ(2k+1)$. **411.** a) $x = 180^\circ k$, b) $x = 360^\circ k \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos \dfrac{\sqrt{17}-1}{4} \approx 38^\circ 40'$. **412.** $x = 180^\circ k$.

413. $\sin 2x = \dfrac{1}{2k+1}$, где k — любое целое число, за исключением -2, -1, 0 и 1. При $k = 2$ годятся лишь те значения x, для которых $\cos 2x > 0$. **414.** a) $\operatorname{ctg} 2x = k + \dfrac{1}{4}$, b) $\csc 2x = l + \dfrac{1}{4}$; l — любое целое число, кроме -1 и 0. **415.** a) $x = 2k\pi \pm \varphi$, b) $x = \dfrac{\pi}{2}(4k \pm 1) \mp \varphi$ (знаки оба верхние или оба нижние), $\varphi = \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{9}{16} \approx 0{,}29870$. **416.** $x = 90^\circ(4k \pm 1)$. *Указание.* Синус равен косекансу только в тех случаях, когда каждый из них равен 1 или каждый из них равен -1. Следует убедиться, что система $\sin x = 1$, $\csc 5x = 1$ (или $\sin x = -1$, $\csc 5x = -1$) непротиворечива. **417.** $x = 90^\circ(4k+1)$, $y = 90^\circ(4l+1)$. *Указание.* Сумма двух синусов равна 2 только в том случае, когда каждый из них равен 1. **418.** $x = 180^\circ k$, $y = 180^\circ(k+2l)$. *Указание.* См. указание к задаче № 416. **419.** $x = 360^\circ k$. *Указание.* Использовать формулу (XVII.2). **420.** $x = 90^\circ(4k-1)$, $y = 90^\circ(4l-1)$, $z = 90^\circ(4m-1)$. *Указание.* См. указание к задаче № 417. **421.** $x = 45^\circ(8k+1)$. *Указание.* Как известно из алгебры $\log_a b \cdot \log_b a = 1$. Таким образом, левая часть уравнения есть сумма двух взаимно обратных величин. Эта сумма равна 2 только в том случае, когда каждая из них равна 1 [формула (XVII.2)].

422. a) $x = \dfrac{360^\circ k}{2^n - p}$ $(p \neq 2^n)$, b) $x = \dfrac{180^\circ(2k+1)}{2^n + p}$ $(p \neq -2^n)$. **423.** a) $x = \dfrac{\log\left(\dfrac{2k\pi}{a} + 3\right)}{\log 2}$ $\left(k > -\dfrac{3a}{2\pi}\right)$, b) $x = \dfrac{\log\left[\dfrac{(2k+1)\pi}{a} - 3\right]}{\log 2}$

$\left(k > \frac{3\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2}\right)$. Логарифмы можно брать при любом (одинаковом) основании. 424. $x = \frac{\log(2\pi k \pm 3\alpha)}{\log 2}$ $\left(k > \mp \frac{3\alpha}{2\pi}\right)$. Знаки оба верхние или оба нижние. Логарифмы можно брать при любом (одинаковом) основании. 425. $x = 2 + \frac{\log \pi - \log 12 + \log(24k \pm 1)}{\log 2}$ $(k \geqslant 0)$.

При $k = 0$ знак только верхний Логарифмы можно брать при любом (одинаковом) основании.

426. $\cos x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4a}}{2}$. Задача возможна при $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

427. При $-\infty < a \leqslant -1$ и $1 \leqslant a < \infty$ $\sin x = \frac{1}{a}$, при $0 \leqslant a \leqslant 1$ $\sin x = 2a - 1$ (при $a = 1$ оба ответа совпадают). При $1 < a < 0$ задача невозможна.

428. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$. Задача возможна, если $45°(4k + 1) \leqslant \alpha \leqslant 45°(4k + 3)$ и притом $\alpha \neq 90°(2k + 1)$. 429. При $-\infty < a \leqslant -2$ $\cos x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, при $-2 < a < 2$ решений нет, при $2 \leqslant a < \infty$ $\cos x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. 430. При $180°(2k - 1) - \varphi \leqslant \alpha \leqslant 180° \cdot 2k + \varphi$ $\operatorname{tg} x = \frac{\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - \sin\alpha}}{\sin\alpha}$, при $180°\,2k + \varphi < \alpha < 180°(2k + 1) - \varphi$ решений нет; $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 38°\,10'$. 432. 1) $\frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, 2) $\frac{c^2}{a^2 + b^2}$, 3) $\frac{2b^2(a^2 + b^2) + 2c^2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$, 4) $\frac{4ab(2c^2 - a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$. 433. $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{3}(6k \pm 1)}$, где k — целое неотрицательное число. При $k = 0$ под радикалом следует брать верхний знак, при положительных k — оба знака. 434. a) $x = \frac{1}{2}\left[-3 \pm \sqrt{13 + 2\pi(4k + 1)}\right]$, b) $x = \frac{1}{2}\left[3 \pm \sqrt{13 + 2\pi(4k - 1)}\right]$, k — целое положительное.

435. $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}\left[\pi(2k + 1) \pm \sqrt{\pi^2(2k + 1)^2 - 16}\right]$, k — любое целое число, кроме -1 и 0. 436. a) $\cos x = \frac{1}{4}\left[\pi(2k + 1) + \sqrt{\pi^2(2k + 1)^2 - 16}\right]$,

$k = -2, -3, -4, \ldots$, b) $\cos x = \frac{1}{4}\left[\pi(2k+1) - \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 - 16}\right]$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ **437.** $x = k\pi \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{4\pi+9}-1}{4} \approx$ $\approx 0{,}42512$. **438.** a) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}\left[\pi(4k+1) \pm \sqrt{\pi^2(4k+1)^2 - 16}\right]$ $(k \neq 0)$, b) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{4}\left[\pi(4k+1) \pm \sqrt{\pi^2(4k+1)^2 + 16}\right]$. **439.** $x = \frac{\pi}{6}(6k+1)$.

440. 1) $x = \pm\sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}} \approx 0{,}50547$, 2) $x = \frac{\sqrt{7}}{14} \approx 0{,}18898$.

441. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. **442.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. **443.** $x = \sqrt{2}$. **444.** $x = \pm(1+\sqrt{3})$. **445.** $x = \frac{\sqrt{17}-3}{4} \approx 0{,}28078$. **446.** $x = \frac{2}{5}$. **447.** Уравнение имеет только несобственный корень $x = 1 - 0$. Это значит, что уравнение удовлетворяется, если $\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ понимать как односторонний предел при стремлении x к 1 слева, а в остальные члены левой части подставить $x = 1$. **448.** $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}7854$, $\varphi = 38°\,09'$, $x = \sin\varphi = 0{,}61767$. **449.** $x_1 = \pm\cos\frac{t}{2}$, $x_2 = \pm\sin\frac{t}{2}$. Знак x должен совпадать со знаком $\sin t$.

450. $x_1 = \cos^2\frac{t}{2}$, $x_2 = \sin^2\frac{t}{2}$. Задача возможна при $\sin t > 0$.

451. Полагая $x = \sin^2\varphi$ (ясно, что оба корня положительны и меньше 1), получим: $\sin^2 2\varphi = 0{,}90576$, $\cos^2 2\varphi = 0{,}09424$, $\cos 2\varphi = \pm 0{,}30699$, $x = \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$; $x_1 = 0{,}34651$, $x_2 = 0{,}65350$. **452.** $x_1 = 0{,}09201$, $x_2 = 0{,}90799$. **453.** $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **454.** 1) $x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, 2) $x_1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **455.** $x = \operatorname{tg}\varphi$, где $\operatorname{tg} 2\varphi = 2k$.

456. 1) $x - y = 180°(2k+1)$, в остальном x и y произвольны, 2) a) $x = 360°k + 101°31'$, $y = 360°l + 108°15'$, b) $x = 360°k - 18°15'$, $y = 360°l - 11°31'$. **457.** a) $x = 180°k + 21°21'$, $y = 180°l + 8°39'$, b) $x = 180°k + 81°21'$, $y = 180°l + 68°39'$. **458.** a) $x - y = 360°k$, в остальном x и y произвольны, b) $x = 180°k$,

$y = 180° l$, c) $x = 360° k \pm 41°24'$, $y = 360° l \pm 41°24'$, знаки оба верхние или оба нижние. 459. a) $x = 180° k$, $y = 180° l$, b) $x = 180° k \pm \varphi$, $y = 180° l \pm$. Знаки оба верхние или оба нижние, $k + l$ — четное, $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54° 44'$, $= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{9} \approx 15° 48'$. 460. a) $x =$ $= 45° (8k + 1)$, $y = 30° (8l + 1)$, b) $x = 45° (8k - 1)$, $y = 30° (8l - 3)$, c) $x = 45° (8k - 3)$, $y = 30° (8l - 1)$, d) $x = 45° (8k + 3)$, $y = 30° (8l - 1)$. 461. a) $x = 360° k \pm \varphi$, $y = 360° l \pm \psi$; b) $x = 180° (2k + 1) \pm \varphi$, $y = 180° (2l + 1) \mp \psi$. В каждом варианте знаки оба верхние или оба нижние, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{500}}{5} \approx 43° 24'$, $\psi = \arcsin \frac{\sqrt[4]{500}}{5} \approx 71° 02$. 462. $x =$ $= 30° [6k + (-1)^k]$, $y = 60° (6l + 3 \pm 1)$. 463. $x = 180° k + 26° 27'$, $y = -180° k + 33° 33'$. 464. $x = 90° (4k + 1)$, $y = 30° [6l + (-1)^l]$, $z = 60° [3m + (-1)^m]$; $6 (2k + l + m) + (-1)^l + 2 \cdot (-1)^m = 3$. 465. $x = 180° k \pm \varphi$, $y = 180° l \pm \psi$, $z = 180° m \pm \chi$. Знаки либо все верхние и $k + l + m = 0$, либо все нижние и $k + l + m = 2$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26°34', \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{9}{2} \approx 77°28', \quad \chi = \operatorname{arctg} 4 \approx 75°58'.$$

466. a) $x = 180k + 45°$, $y = 180°l + \varphi$, $z = 180°m + \psi$; b) $x = 180°k + \varphi$, $y = 180°l + 45°$, $z = 180°m + \psi$. В обоих случаях $k + l + m = 0$, $\varphi = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°26'$, $\psi = \operatorname{arctg} 3 \approx 71°34'$. 467. $x = 180°k \pm \varphi$, $y =$ $= 180°l \pm \psi$, $z = 180°m \pm \chi$. Знаки либо все верхние и $k + l + m = 0$, либо все нижние и $k + l + m = 1$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{ab + bc + ca}}, \ \psi = \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{ab + bc + ca}}, \ \chi = \operatorname{arctg} \frac{c}{\sqrt{ab + bc + ca}}.$$

468. a) $x = 180° k$, $y = 180° l$, $z = 180° m$; $k + l + m = 1$, b) $x =$ $= 180° k \pm \varphi$, $y = 180° l \pm \psi$, $z = 180° m \pm \chi$. Знаки либо все верхние и $k + l + m = 0$, либо все нижние и $k + l + m = 2$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} a \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}, \qquad \psi = \operatorname{arctg} b \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}},$$

$\chi = \operatorname{arctg} c \sqrt{\frac{a + b + c}{abc}}$. 469. $\frac{\alpha - \beta}{2} + 90° (2k + 1)$, $\frac{\alpha - \beta}{2} - 90° (2k + 1)$ и β. Любой из этих трех ответов может быть принят за x, любой другой за y и третий за z. 470. $x = 2$, $y = 60° (6k \pm 1)$. $z = 60° (6l \pm 1)$. 471. $x = 45° (2k + 1)$, $y = 45° (2k + 8l - 1)$, $z = 60° [6m + (-1)^{k+1}]$.

472. $x = 30° (6k \pm 1)$, $y = 30° (6l \pm 1)$, $z = 45° (2m + 1)$.

473. $(1 - b)(1 + 2b^2) = 2a^2$. 474. $a^2 + 2b = 1$. 475. $a^4 - 3a + 2b = 0$.

476. $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 3) = 2b$. 477. $a^2 b^2 (a^2 - 1)^2 (a^2 - 2) + 1 = 0$.

478. $b (a^2 - 1)^3 + 6 (a^2 - 1)^2 - 8 = 0$. 479. 1) $[2p^2 - a^2 (1 - q) -$ $- b^2 (1 + q)]^2 = 4a^2 b^2 (1 - q^2)$, 2) $(2p^2 - a^2 - b^2 - 2abq)^2 = (b^2 - a^2)^2 (1 - q^2)$.

480. $(a^2-b-1)^2=a^2(2-a^2)$. 481. $a^2+4b^2=1$. 482. $a^2+b^2=c^2$. 483. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$ 484. $a-b=\sin\alpha$. 485. 1) $a^2+b^2=2(1+c)$. 2) $a^2+b^2=2(1+c)$. 486. $a^2=\dfrac{27-12\sqrt{3}}{11}$. 487. $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4a^2b^2c^2=0$. 488. $ab+bc+ca=(abc-a-b-c)d+1$. 489. (См. формулу (X. 2). 491. $\dfrac{\cos\left[\alpha+\dfrac{n(\pi+h)}{2}\right]\sin\dfrac{(n+1)(\pi+h)}{2}}{\cos\dfrac{h}{2}}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106.

492. $\dfrac{\sin\left[\alpha+\dfrac{n(\pi+h)}{2}\right]\sin\dfrac{(n+1)(\pi+h)}{2}}{\cos\dfrac{h}{2}}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106.

493. 1) $-\dfrac{\cos\dfrac{(n+1)(\pi+\alpha)}{2}\sin\dfrac{n(\pi+\alpha)}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль см. примечание к решению задачи № 106.

2) $-\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)(\pi+\alpha)}{2}\sin\dfrac{n(\pi+\alpha)}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106.

494. 1) $\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106. 2) $\dfrac{\sin 2n\alpha}{2\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106. 496. 1) $\dfrac{(n+1)\cos(\alpha+nh)-n\cos[\alpha+(n+1)h]-\cos\alpha}{4\sin^2\dfrac{h}{2}}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106. 2) $\dfrac{(n+1)\sin(\alpha+nh)-n\sin[\alpha+(n+1)h]-\sin\alpha}{4\sin^2\dfrac{h}{2}}$.

О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106. *Указание.* В обоих случаях применить «треугольное суммирование», записывая данную сумму в n строках:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \cos(\alpha+h) + \cos(\alpha+2h) + \cos(\alpha+3h) + \ldots + \cos(\alpha+nh),\\
S_2 &= \qquad\qquad\quad \cos(\alpha+2h) + \cos(\alpha+3h) + \ldots + \cos(\alpha+nh),\\
S_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos(\alpha+3h) + \ldots + \cos(\alpha+nh),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
S_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cos(\alpha+nh).
\end{aligned}
$$

Каждое S_i вычисляется по формуле (X. 2) (разумеется, для каждого S надо взять соответствующие значения x и n), затем вычисляется $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.

Еще лучше применить способ треугольного суммирования к сумме:

$$e^{i(\alpha+h)} + 2e^{i(\alpha+2h)} + 3e^{i(\alpha+3h)} + \ldots + ne^{i(\alpha+nh)}.$$

Тогда в каждой строке получатся геометрические прогрессии. Полученный ответ расчленить на действительную и мнимую части. **497.** $x = 360^\circ \pm \varphi$, где $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 72^\circ 58'$. **498.** *Указание.* Воспользоваться формулой (V. 22)], полагая последовательно $x = \frac{a}{3}, \frac{a}{3^2}, \ldots, \frac{a}{3^{n+1}}$. Полученные равенства умножить соответственно на $1, 3, \ldots, 3^n$ и сложить. Затем перейти к пределу при $n \to \infty$.

499. $\frac{n+1}{2} - \frac{\cos(2\alpha + nh)\cdot\sin(n+1)h}{2\sin h}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106.

500. $\frac{n+1}{2} + \frac{\cos(2\alpha + nh)\sin(n+1)h}{2\sin h}$. О случае, когда знаменатель обращается в нуль, см. примечание к решению задачи № 106.

501. 1) $\frac{n}{2}$. 2) $\frac{n}{2}$. **502.** $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$. **505.** 1) $\frac{n}{2} + \frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. 2) $\frac{n}{2} - \frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106.

506. $\frac{n}{2} + \frac{\sin 4n\alpha}{4\sin 2\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. **510.** 1) $\frac{(n+1)\cos(\alpha-\beta)}{2} + \frac{\sin(n+1)h\cdot\cos(\alpha+\beta+nh)}{2\sin h}$. О случае, когда знаменатель

равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106.
2) $\frac{(n+1)\cos(\alpha-\beta)}{2} - \frac{\sin(n+1)h\cdot\cos(\alpha+\beta+nh)}{2\sin h}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. **511.** 1) $\frac{\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. 2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg} n\alpha}{\sin\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. **512.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(2n+1)\alpha}{\sin 2\alpha}$. О случае, когда знаменатель равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106.

514. $\frac{\operatorname{tg} n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2\sin\alpha}$. **515.** 1) $\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{4\sin\alpha} - \frac{n}{4}$. О случаях, когда один из знаменателей равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. *Указание.* Искомая сумма произведений может быть представлена так:

$$\frac{1}{2}\left[(\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha)^2-(\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\ldots+\cos^2 n\alpha)\right].$$

Отдельные части этого выражения — см. формулу (X 4) и ответ к задаче № 505 1). 2) $\frac{\sin^2\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin n\alpha\cdot\cos(n+1)\alpha}{4\sin\alpha} - \frac{n}{4}$.

О случаях, когда один из знаменателей равен нулю, см. примечание к решению задачи № 106. *Указание.* Искомая сумма произведений может быть представлена так:

$$\frac{1}{2}\left[(\sin n\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha)^2-(\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\ldots+\sin^2 n\alpha)\right]$$

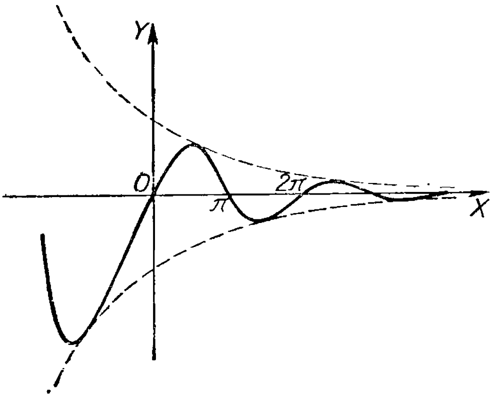
Отдельные части этого выражения — см. формулу (X 3) и ответ к задаче № 505 2).

516. $s_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$, $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

517. $s_n=\operatorname{arcctg}\frac{1+(n+1)a^2}{na}$, $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\operatorname{arcctg}a$.

518. $s_n = \operatorname{arcctg} \frac{n+2}{n}$, $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

519. $s_n = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{n+1}$. $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \operatorname{arctg} x$. Ряд сходится, если $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$. 520. $s_n = \operatorname{arctg}(n^2+n+1) - \frac{\pi}{4}$, $s = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{\pi}{4}$ 521. $\frac{1}{2^7}$. 522. $\frac{2\cos 2^n \alpha + 1}{2\cos\alpha + 1}$. Этот ответ теряет силу, если $2\cos\alpha + 1 = 0$, т. е. $\alpha = 120^\circ(3k \pm 1)$. Можно доказать, что в этом случае $\cos 2^m \alpha = -\frac{1}{2}$ при любом целом неотрицатель-



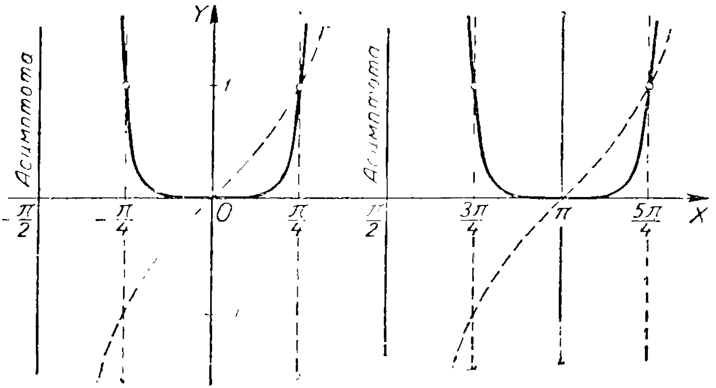
Черт. 30

ном m, и данное произведение примет вид: $(-2)\cdot(-2)\cdots(-2) = (-2)^n$. Тот же результат можно получить из общего решения путем предельного перехода при $\alpha \to 120^\circ(3k \pm 1)$. 523. $\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2^n\left(\cos\frac{\alpha}{2^n} - \cos\frac{\beta}{2^n}\right)}$.

Этот ответ теряет силу, если $\cos\frac{\alpha}{2^n} - \cos\frac{\beta}{2^n} = 0$. Можно доказать, что в этом случае $\cos\frac{\alpha}{2^m} = \cos\frac{\beta}{2^m}$ при $m = 1, 2, 3, \cdots, n$ и данное произведение примет вид: $\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cdots\left(2\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) = \frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$ *.

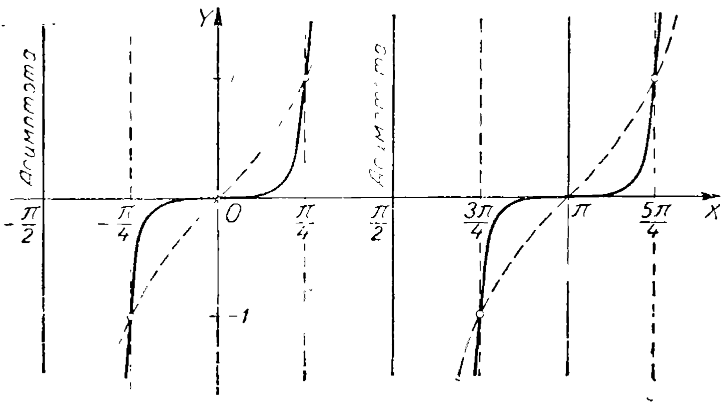
* Этот результат можно найти тем способом, который показан в решении задачи № 45. Он же встречался в задаче № 115.

Тот же результат можно получить из общего решения путем предельного перехода при $\beta \to 2^{n+1}k\pi + \alpha$. 524. $\dfrac{\operatorname{tg} 2^n \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$. Эта формула неприменима при $\alpha = k\pi$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$. В первом случае произведение принимает вид: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$, а во втором $0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$. И в том и в другом случае эти результаты можно получить из



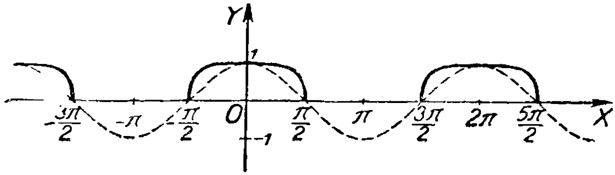
Черт. 31

общего решения путем предельного перехода. 525. См. чертеж 30. Пунктиром показаны линии $y = a^x$ и $y = a^{-x}$. 526. 1) На чертеже 11 передвинуть график на $\dfrac{\pi}{2}$ влево. 2) На чертеже 12



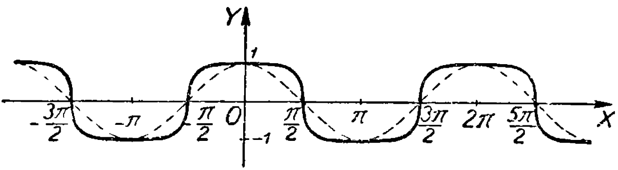
Черт. 32

передвинуть график на $\frac{\pi}{2}$ влево. 527. 1) См. чертеж 31. Пунктиром показана тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$. 2) См. чертеж 32. Пунк-



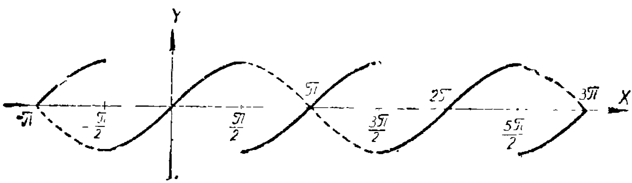
Черт. 33

тиром показана тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$. 528. 1) См. чертеж 33. Пунктиром показана косинусоида $y = \cos x$. 2) См. чертеж 34. Пунктиром показана косинусоида $y = \cos x$. 529. На чертеже 34 сдвинуть график



Черт. 34

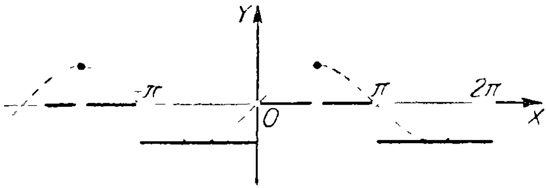
на $\frac{\pi}{2}$ вправо. 530. На чертеже 27 сдвинуть график на $\frac{\pi}{2}$ влево. 531. См. чертеж 35. Пунктиром показана синусоида $y = \sin x$. 532. 1) Взять тангенсоиду $y = \operatorname{tg} x$ и те ее части, которые лежат ни-



Черт. 35

же оси X, заменить зеркальными отражениями относительно оси X. 2) Взять синусоиду $y = \sin x$ и те ее части, которые лежат выше оси X, заменить зеркальными отражениями относительно оси X. 3) При $0 \leqslant x \leqslant \pi$ — синусоида $y = \sin x$, при $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ — отрезок оси X. Дальше (а также при $x < 0$) — периодическое повторение.

533. См чертеж. 36. Пунктиром показана синусоида $y = \sin x$. **536.** *Указание*. Обозначив данное выражение через m получим квадратное уравнение для x и используем условие действительности его корней. **541.** a) $30^\circ(12k+1) < x < 30^\circ(12k+5)$, b) $90^\circ(4k+2) < x < 90^\circ(4k+3)$. **542.** $60^\circ(6k+2) < x < 60^\circ(6k+5)$. **543.** a) $180^\circ(2k+1) < x < 180^\circ(2k+1)+\varphi$, b) $180^\circ \cdot 2k - \varphi < x < 180^\circ \cdot 2k$, где $\varphi =$



Черт. 36

$= \arcsin \frac{1}{3} \approx 19^\circ 28'$. **544.** $30^\circ(12k+7) \leqslant x \leqslant 30^\circ(12k+11)$.

545. a) $180^\circ \cdot 2k < x < 180^\circ(2k+1) - \varphi$, b) $90^\circ(4k+2) < x < 90^\circ(4k+3)+\varphi$, где $\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 19^\circ 05'$

546. a) $30^\circ(12k+1) < x < 30^\circ(12k+3)$, b) $30^\circ(12k+3) < x < 30^\circ(12k+5)$. **547.** a) $30^\circ(6k+7) < x < 30^\circ(6k+11)$, b) $180^\circ \cdot 2k + \ < x < 180^\circ(2k+1) - \varphi$, где $\varphi = \arcsin(\sqrt{3}-1) \approx 47^\circ 04'$. **548.** Наименьшее значение равно 2, оно достигается при $x = \frac{\pi}{4}$. *Указание*. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — взаимно обратные величины. Использовать свойство (XVII. 2). **549.** Наибольшее значение достигается при $x = 90^\circ(4k+1) - \varphi$, оно равно $\sqrt{a^2+b^2}$. Наименьшее значение достигается при $x = 90^\circ(4k-1) - \varphi$, оно равно $-\sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-180^\circ < \varphi \leqslant 180^\circ$. **550.** При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{3}$ функция убывает от -1 до $-1\frac{1}{2}$; при возрастании x от $\frac{\pi}{3}$ до π функция возрастает от $-1\frac{1}{2}$ до 3. При $x = \frac{\pi}{3}$ функция имеет *минимум*, равный $-1\frac{1}{2}$. При $x = \pi$ функция принимает *наибольшее значение* на отрезке $[0, \ ]$, равное 3. **551.** При $0 < x < \pi$ возрастает от -1 до 9, при $\ < x < 2\pi$ убывает от 9 до -1. Дальше повторяется периодически. **552.** При $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ убывает от 0 до $-\frac{1}{4}$, при $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ возрастает от $-\frac{1}{4}$ до 2, при $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$ убывает от 2 до $-\frac{1}{4}$, при $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$ возрастает от $-\frac{1}{4}$ до 0. Дальше повторяется периодически. 553. При $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ убывает от 12 до 2, при $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ возрастает от 2 до 12. Дальше повторяется периодически 554 Следует различать три случая: a) Если $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, т. е. $180^\circ(4k-1) < \alpha < 180^\circ(4k+1)$, то наибольшее значение достигается при $x = 90^\circ(4k+1) + \frac{\alpha}{2}$; оно равно $2\cos\frac{\alpha}{2}$. b) Если $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, т. е. $180^\circ(4k+1) < \alpha < 180^\circ(4k+3)$, то наибольшее значение достигается при $x = 90^\circ(4k-1) + \frac{\alpha}{2}$; оно равно $-2\cos\frac{\alpha}{2}$. c) Если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, т. е. $\alpha = 180^\circ(2k+1)$, то исследуемое выражение тождественно равно нулю. 555. Наибольшее значение достигается при $x = 45^\circ(4k+1) - \frac{\alpha}{2}$; оно равно $\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 556. Наименьшее значение достигается при $x = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}$; оно равно $2\sqrt{ab}$. 557. При $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$ — минимум, равный 2. При $x = \frac{\pi}{2} + \alpha$ — максимум, равный -2. *Указание*. Использовать свойство (XVII. 2). 558. При $0 < x < \pi$ положительно, при $\pi < x < 2\pi$ отрицательно, при $x = 0$, $x = \pi$ и $x = 2\pi$ равно 0. 559. 1) $-\sin 1 \leqslant \sin(\cos x) \leqslant \sin 1$ ($\sin 1 \approx 0{,}84147$), 2) $\cos 1 \leqslant \cos(\sin x) \leqslant 1$ ($\cos 1 \approx 0{,}54030$), 3) $-\infty < \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x) < \infty$. 560. Хорды, заключающие данный угол, должны быть равны между собой. 561. 90°. 562. 90°, т. е. параллелограмм должен быть ромбом. 563. $\frac{3}{2}$. 564. ∞. 565. $\sec^2\alpha$. 566. $-\operatorname{ctg}\alpha$. 567. $\cos^3\alpha$. 568. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 569. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 570. $\frac{1}{2}$. 571. $\frac{1}{2}$. 572. $2\sqrt{2}$. 573. ∞. 574. $\frac{1}{2}$. 575. ∞. 576. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 577. 2. 578. -1. 579. 0. 580. 1) 2, 2) 2. 581. $\sin 2\alpha$. 582. $\frac{a \cdot \sin a\alpha}{2\alpha}$. 583. $\frac{1}{2}$. 584. 1. 585. $\frac{1}{2}$. 586. $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^4\alpha}$ 587. $-2\sin 2\alpha$. 588. $3\sin^2\alpha\cdot\cos^3\alpha$. 589. $\frac{3}{2}$. 590. 3. 591. 1. 592. $\frac{1}{p}$ 593. 2. 594. $3\sqrt{2}$ 595. $\frac{\sin a - a\cdot\cos a}{\cos a + a\sin a}$ 596. x. 597. a. 598. $\frac{1}{2}$. 599. 0. 600. $-\sqrt{2}$. 601. 0. 602. $\frac{2a}{\pi}$. 603. $\frac{a}{\pi}$.

604. $\dfrac{1}{1+a^2}$. 605. $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{1+a^2}$. 606. $\dfrac{k(1+a^2)}{1+k^2a^2}$. 607. ∞.

608. 2) α — ступень таблицы. Вычислить каким-либо способом $\cos\alpha$ и $\cos 2\alpha$ (или $\sin\alpha$ и $\sin 2\alpha$); заодно легко определяется $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$. Затем, полагая в формулах Симпсона последовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$, будем получать косинусы (или синусы) 3α, 4α, 5α, ... 609. 2) α — ступень таблицы. Полагаем в формулах Симпсона последовательно $h = \alpha$, 2α, 3α, ... Каждый раз два члена формулы будут известны, и мы сможем определить третий член $[\cos(30° + h)$ или $\sin(30° + h)]$. 610. 1) $-0{,}61254$, 2) $1{,}41793$. 611. 1) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}410$, $x_3 = -1{,}410$, 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}131$, $x_3 = -1{,}131$. 612. $x = 1{,}166$. 613. $x = 1{,}077$. 614. $x = 0{,}877$. 615. $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ (точно), $x_2 \approx 1{,}721$ (с недостатком, погрешность меньше 0,0005). 616. Если $y = 0$ (т. е. z есть действительное число) или $x = k\pi$. 617. $0{,}27175 - i\cdot 1{,}08392$. 618. 1) $z = 2k\pi \pm i\ln 5$, 2) $z = 2k\pi \pm i\ln 4$, 3) $z = 2k\pi \pm i\ln\dfrac{5}{2}$. 619. 1) $z = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \pm i\ln 9$, 2) $z = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \pm i\ln 8$, 3) $z = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \pm i\ln 6$. 620. 1) $z = (4k\pm 1)\dfrac{\pi}{2} \mp i\ln 2$; знаки оба верхние или оба нижние; 2) $z = k\pi + (-1)^k i\ln 4$. 622. $\operatorname{ctg} B = \dfrac{a\sqrt{2} - l_c}{l_c}$. *Указание.* Воспользоваться формулой (XIV. 6). 623. $a = \dfrac{4\sqrt{195}}{15} \approx 3{,}7238$, $b = \dfrac{2\sqrt{7905}}{15} \approx 11{,}8547$, $A = 17°26'$, $B = 72°34'$. 624. $c = 7{,}9057$, $A = 29°35'$, $B = 47°47'$, $C = 102°38'$. 625. $S = 174{,}95$. 626. $S = 2105{,}43$. 627. $S = 78504$. 628. $A = 47°46'$, $B = 60°36'$, $C = 71°38'$. 629. $A = 68°25'$, $B = 67°03'$, $C = 44°32'$. 630. $A = 41°15'$, $C = 75°38'$. 631. $A = 74°03'$, $B = 40°44'$, $C = 65°13'$. 632. $A = 25°32'$, два других угла суть $47°13'$ и $107°15'$. 633. $l_b = \dfrac{\sqrt{105}}{2} \approx 5{,}12348$. 634. Если центры лежат по разные стороны общей хорды, то $S = R^2\left(\alpha - \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + r^2\left(\beta - \dfrac{1}{2}\sin 2\beta\right)$. Если центры лежат по одну сторону общей хорды,

то $S = R^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) + r^2\left[\pi - \left(\beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta\right)\right]$, где R r, $\alpha =$

$= \arcsin\frac{a}{2R}$, $\beta = \arcsin\frac{a}{2r}$. **635.** $\sin A = \frac{3}{4}\operatorname{ctg}\alpha$. **636.** $\cos A =$

$= \frac{2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{2\sqrt{(2\lambda^2 + 2\mu^2 - \nu^2)(2\lambda^2 + 2\nu^2 - \mu^2)}}$ и т. д.*. Задача возможна в том и только в том случае, когда λ, μ, ν удовлетворяют неравенству треугольника, т. е. $\lambda + \mu \geqslant \nu$ (предполагая, что $\lambda \leqslant \mu \leqslant \nu$). **637.** $A = 120°$, $B = C = 30°$. **638.** $a = \sqrt{19}$, $b = 2$, $c = 3$. **639.** $B = 84°$, $C = 24°$. **640.** $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. **641.** $a = 3$, $c = 6$. **642.** $C = 90°$. **643.** $B = 132°$, $C = 12°$. **644.** $a = b = c = 2\sqrt{6}$, $A = B = C = 60°$. **645.** $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. **646.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 54°44'$. **647.** $2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 109°28'$.

648. Через 14 *мин* 16 *сек*. **649.** $\sin 2\alpha = \frac{m}{m+n}$. При $m = n$ $\alpha = 15°$. При $n = 0$ $\alpha = 45°$ (при этом вершина конуса находится в полюсе полусферы).

650. $2\arccos\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \approx 74°56'$. **651.** $V_a : V_b : V_c = \csc A : \csc B : \csc C$. **652.** $60°$.

671. Прямоугольный ($C = 90°$). **672.** Прямоугольный ($C = 90°$) или равнобедренный ($a = b$). **673.** Прямоугольный ($C = 90°$) или равнобедренный ($a = b$). **674.** Равносторонний. **679.** 1) $c = 101°11'$, $A = 69°33'$, $B = 117°29'$, 2) $c = 65°18'$, $A = 105°04'$, $B = 147°12'$. **680.** 1) $b = 75°05'$, $A = 48°37'$, $B = 73°51'$; 2) треугольник невозможен. **681.** 1) Два решения: $b_1 = 8°45'$, $c_1 = 135°59'$, $B_1 = 12°39'$; $b_2 = 171°15'$, $c_2 = 44°01'$, $B_2 = 167°21'$. 2) треугольник невозможен. **682.** 1) $a = 52°03'$, $c = 106°54'$, $B = 112°56'$, 2) $a = 162°43'$, $c = 57°16'$, $B = 101°33'$. **683.** 1) $a = 11°36'$, $b = 169°13'$, $B = 136°33'$, 2) $a = 141°17'$, $b = 64°39'$, $B = 73°29'$. **684.** 1) $a = 10°22'$, $b = 139°51'$, $c = 138°45'$, 2) треугольник невозможен. **685.** $A = 46°38'$, $B = 71°00'$, $C = 102°55'$. **686.** $b = 76°29'$, $A = 105°27'$ $C = 86°18'$. **687.** $b = 57°41'$, $A = 125°33'$, $B = 52°08'$. **688.** 1) Два решения: $b_1 = 35°23'$, $B_1 = 26°03'$, $C_1 = 49°20'$; $b_2 = 144°37'$, $B_2 = 153°57'$, $C_2 = 130°40'$, 2) треугольник невозможен. **689.** $a = 69°37'$, $b = 135°54'$, $C = 67°27'$. **690.** 1) $a = 125°50'$, $b = 101°04'$. $B = 103°53'$, 2) треугольник невозможен.

---

* См. сноску на стр. 181.

691. 1) $A = 58^\circ 31'$, $B = 78^\circ 35'$, $C = 101^\circ 03'$, 2) $A = 64^\circ 07'$, $B = 157^\circ 22'$, $C = 50^\circ 48'$. **692.** 1) $a = 109^\circ 15'$, $b = 65^\circ 46'$, $c = 80^\circ 38'$, 2) $a = 118^\circ 36'$, $b = 101^\circ 50'$, $c = 113^\circ 17'$. **693.** 1) $c = 51^\circ 32'$, $A = 132^\circ 54'$, $B = 44^\circ 09'$, 2) $c = 106^\circ 05'$, $A = 102^\circ 10'$, $B = 63^\circ 34'$. **694.** 1) $a = 46^\circ 03'$, $b = 75^\circ 04'$, $C = 120^\circ 26'$, 2) $a = 83^\circ 55'$, $b = 56^\circ 24'$, $C = 113^\circ 22'$. **695.** 1) $c = 122^\circ 27'$, $B = 66^\circ 02'$, $C = 115^\circ 13'$, 2) Два решения: $c_1 = 71^\circ 03'$, $B_1 = 45^\circ 25'$, $C_1 = 47^\circ 19'$, $c_2 = 169^\circ 40'$, $B_2 = 134^\circ 35'$, $C_2 = 171^\circ 59'$. **696.** 1) Два решения: $b_1 = 74^\circ 14'$, $c_1 = 74^\circ 58'$, $C_1 = 82^\circ 55'$; $b_2 = 105^\circ 46'$, $c_2 = 127^\circ 03'$, $C_2 = 124^\circ 55'$. 2) Два решения: $b_1 = 41^\circ 31'$, $c_1 = 44^\circ 21'$, $C_1 = 81^\circ 02'$; $b_2 = 138^\circ 29'$, $c_2 = 155^\circ 48'$, $C_2 = 144^\circ 37'$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СПИСОК ФОРМУЛ

I. Связь между радианной и градусной мерами угла

$$n^\circ = \frac{\pi n}{180}\ \text{рад} \approx 0{,}01745\ n\ \text{рад}. \qquad \text{(I. 1)}$$

$$\alpha\ \text{рад} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}296\alpha^\circ. \qquad \text{(I. 2)}$$

$$1^\circ \approx 0{,}017453\ \text{рад}. \qquad \text{(I. 3)}$$

$$1' \approx 0{,}000291\ \text{рад}. \qquad \text{(I. 4)}$$

$$1'' \approx 0{,}000005\ \text{рад}. \qquad \text{(I. 5)}$$

$$1\ \text{рад} \approx 57^\circ 17' 44'',8. \qquad \text{(I. 6)}$$

II. Связи между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \qquad \text{(II. 1)}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \qquad \text{(II. 2)}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \qquad \text{(II. 3)}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}. \qquad \text{(II.4)}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}. \qquad \text{(II. 5)}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \qquad \text{(II. 6)}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x. \qquad \text{(II. 7)}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x. \qquad \text{(II. 8)}$$

III. Формулы приведения

Наименование функций	Значения аргумента						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
sec	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$	$-\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\csc\alpha$	$\csc\alpha$
csc	$-\csc\alpha$	$\sec\alpha$	$\sec\alpha$	$\csc\alpha$	$-\csc\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$

IV. Формулы сложения

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y. \qquad (IV.1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y. \qquad (IV.2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y. \qquad (IV.3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y. \qquad (IV.4)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \qquad (IV.5)$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}. \qquad (IV.6)$$

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}. \qquad (IV.7)$$

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}. \qquad (IV.8)$$

$$\sin(x+y+z) = \sin x \cdot \cos y \cdot \cos z + \cos x \cdot \sin y \cdot \cos z + \cos x \cdot \cos y \cdot \sin z - \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z. \qquad (IV.9)$$

$$\cos(x+y+z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \cos x \cdot \sin y \cdot \sin z - \sin x \cdot \cos y \cdot \sin z - \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z. \qquad (IV.10)$$

$$\operatorname{tg}(x+y+z) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x}. \qquad (IV.11)$$

$$\operatorname{ctg}(x+y+z) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} z}{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} y \cdot \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} z \cdot \operatorname{ctg} x - 1}. \qquad (IV.12)$$

V. Кратные аргументы

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x. \qquad (V.1)$$

$$\sin 4x = 4 \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x). \qquad (V.2)$$

$$\sin 6x = 2 \sin x \cdot \cos x (3 \cos^4 x - 10 \cos^2 x \sin^2 x + 3 \sin^4 x). \qquad (V.3)$$

$$\sin 8x = 8 \sin x \cdot \cos x (\cos^6 x - 7 \cos^4 x \sin^2 x + 7 \cos^2 x \cdot \sin^4 x - \sin^6 x). \qquad (V.4)$$

$$\sin 10x = 2 \sin x \cdot \cos x (5 \cos^8 x - 60 \cos^6 x \cdot \sin^2 x + 126 \cos^4 x \cdot \sin^4 x - 60 \cos^2 x \cdot \sin^6 x + 5 \sin^8 x). \qquad (V.5)$$

$$\sin 4x = 4\sin x\cdot\cos x\,(2\cos^2 x - 1). \tag{V.6}$$

$$\sin 6x = 2\sin x\cdot\cos x\,(16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 3). \tag{V.7}$$

$$\sin 8x = 8\sin x\cdot\cos x\,(16\cos^6 x - 24\cos^4 x + 10\cos^2 x - 1). \tag{V.8}$$

$$\sin 10x = 2\sin x\cdot\cos x\,(256\cos^8 x - 512\cos^6 x + 336\cos^4 x - 80\cos^2 x + 5). \tag{V.9}$$

$$\sin 4x = 4\sin x\cdot\cos x\,(-2\sin^2 x + 1). \tag{V.10}$$

$$\sin 6x = 2\sin x\cdot\cos x\,(16\sin^4 x - 16\sin^2 x + 3). \tag{V.11}$$

$$\sin 8x = 8\sin x\cdot\cos x\,(-16\sin^6 x + 24\sin^4 x - 10\sin^2 x + 1). \tag{V.12}$$

$$\sin 10x = 2\sin x\cdot\cos x\,(256\sin^8 x - 512\sin^6 x + 336\sin^4 x - 8\sin^2 x + 5). \tag{V.13}$$

$$\sin 3x = \sin x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x). \tag{V.14}$$

$$\sin 5x = \sin x\,(5\cos^4 x - 10\cos^2 x\cdot\sin^2 x + \sin^4 x). \tag{V.15}$$

$$\sin 7x = \sin x\,(7\cos^6 x - 35\cos^4 x\cdot\sin^2 x + 21\cos^2 x\cdot\sin^4 x - \sin^6 x). \tag{V.16}$$

$$\sin 9x = \sin x\,(9\cos^8 x - 84\cos^6 x\cdot\sin^2 x + 126\cos^4 x\cdot\sin^4 x - 36\cos^2 x\cdot\sin^6 x + \sin^8 x). \tag{V.17}$$

$$\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1). \tag{V.18}$$

$$\sin 5x = \sin x\,(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1). \tag{V.19}$$

$$\sin 7x = \sin x\,(64\cos^6 x - 80\cos^4 x + 24\cos^2 x - 1). \tag{V.20}$$

$$\sin 9x = \sin x\,(256\cos^8 x - 448\cos^6 x + 240\cos^4 x - 40\cos^2 x + 1). \tag{V.21}$$

$$\sin 3x = \sin x\,(-4\sin^2 x + 3). \tag{V.22}$$

$$\sin 5x = \sin x\,(16\sin^4 x - 20\sin^2 x + 5). \tag{V.23}$$

$$\sin 7x = \sin x\,(-64\sin^6 x + 112\sin^4 x - 56\sin^2 x + 7). \tag{V.24}$$

$$\sin 9x = \sin x\,(256\sin^8 x - 576\sin^6 x + 432\sin^4 x - 120\sin^2 x + 9). \tag{V.25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{V.26}$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\cdot\sin^2 x + \sin^4 x. \tag{V.27}$$

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x \cdot \sin^2 x + 15\cos^2 x \cdot \sin^4 x - \sin^6 x. \qquad (V.28)$$

$$\cos 8x = \cos^8 x - 28\cos^6 x \cdot \sin^2 x + 70\cos^4 x \cdot \sin^4 x - 28\cos^2 x \cdot \sin^6 x + \sin^8 x. \qquad (V.29)$$

$$\cos 10x = \cos^{10} x - 45\cos^8 x \cdot \sin^2 x + 210\cos^6 x \cdot \sin^4 x - 210\cos^4 x \cdot \sin^6 x + 45\cos^2 x \cdot \sin^8 x - \sin^{10} x. \qquad (V.30)$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1. \qquad (V.31)$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1. \qquad (V.32)$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1. \qquad (V.33)$$

$$\cos 8x = 128\cos^8 x - 256\cos^6 x + 160\cos^4 x - 32\cos^2 x + 1. \qquad (V.34)$$

$$\cos 10x = 512\cos^{10} x - 1280\cos^8 x + 1120\cos^6 x - 400\cos^4 x + 50\cos^2 x - 1. \qquad (V.35)$$

$$\cos 2x = -2\sin^2 x + 1. \qquad (V.36)$$

$$\cos 4x = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1. \qquad (V.37)$$

$$\cos 6x = -32\sin^6 x + 48\sin^4 x - 18\sin^2 x + 1. \qquad (V.38)$$

$$\cos 8x = 128\sin^8 x - 256\sin^6 x + 160\sin^4 x - 32\sin^2 x + 1. \qquad (V.39)$$

$$\cos 10x = -512\sin^{10} x + 1280\sin^8 x - 1120\sin^6 x + 400\sin^4 x - 50\sin^2 x + 1. \qquad (V.40)$$

$$\cos 3x = \cos x\,(\cos^2 x - 3\sin^2 x). \qquad (V.41)$$

$$\cos 5x = \cos x\,(\cos^4 x - 10\cos^2 x \cdot \sin^2 x + 5\sin^4 x). \qquad (V.42)$$

$$\cos 7x = \cos x\,(\cos^6 x - 21\cos^4 x \cdot \sin^2 x + 35\cos^2 x \cdot \sin^4 x - 7\sin^6 x). \qquad (V.43)$$

$$\cos 9x = \cos x\,(\cos^8 x - 36\cos^6 x \cdot \sin^2 x + 126\cos^4 x \cdot \sin^4 x - 81\cos^2 x \cdot \sin^6 x + 9\sin^8 x). \qquad (V.44)$$

$$\cos 3x = \cos x\,(4\cos^2 x - 3). \qquad (V.45)$$

$$\cos 5x = \cos x\,(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5). \qquad (V.46)$$

$$\cos 7x = \cos x\,(64\cos^6 x - 112\cos^4 x + 56\cos^2 x - 7). \qquad (V.47)$$

$$\cos 9x = \cos x\,(256\cos^8 x - 576\cos^6 x + 432\cos^4 x - 120\cos^2 x + 9). \qquad (V.48)$$

$$\cos 3x = \cos x\,(-4\sin^2 x + 1). \tag{V.49}$$

$$\cos 5x = \cos x\,(16\sin^4 x - 12\sin^2 x + 1). \tag{V.50}$$

$$\cos 7x = \cos x\,(-64\sin^6 x + 80\sin^4 x - 24\sin^2 x + 1). \tag{V.51}$$

$$\cos 9x = \cos x\,(256\sin^8 x - 448\sin^6 x + 240\sin^4 x - 40\sin^2 x + 1). \tag{V.52}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin nx = C_n^1\cos^{n-1}x\cdot\sin x - C_n^3\cos^{n-3}x\cdot\sin^3 x + \\ \qquad + C_n^5\cos^{n-5}x\cdot\sin^5 x - \ldots \\ \text{последний член} = \\ = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n x & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}\, n\cdot\cos x\cdot\sin^{n-1}x & \text{при } n \text{ четном}. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{V.53}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos nx = \cos^n x - C_n^2\cos^{n-2}x\cdot\sin^2 x + \\ \qquad + C_n^4\cos^{n-4}x\cdot\sin^4 x - \ldots \\ \text{последний член} = \\ = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\cdot\cos x\cdot\sin^{n-1}x & \text{при } n \text{ нечетном}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n x & \text{при } n \text{ четном}. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{V.54}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \tag{V.55}$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x\,(3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}. \tag{V.56}$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x\,(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}. \tag{V.57}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}. \tag{V.58}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg} x\,(\operatorname{ctg}^2 x - 3)}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}. \tag{V.59}$$

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6\operatorname{ctg}^2 x + 1}{4\operatorname{ctg} x\,(\operatorname{ctg}^2 x - 1)}. \tag{V.60}$$

VI. Половинный аргумент

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}. \qquad \text{(VI.1)}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}. \qquad \text{(VI.2)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \quad \text{(VI.3)} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}. \quad \text{(VI.4)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}. \quad \text{(VI.5)} \qquad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \quad \text{(VI.6)}$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \quad \text{(VI.7)} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \quad \text{(VI.8)} \equiv \text{(V.55)}$$

VII. Преобразование сумм в произведения

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad \text{(VII.1)}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}. \qquad \text{(VII.2)}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}. \qquad \text{(VII.3)}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}. \qquad \text{(VII.4)}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}. \qquad \text{(VII.5)}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}. \qquad \text{(VII.6)}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}. \qquad \text{(VII.7)}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x\cdot\sin y}. \qquad \text{(VII.8)}$$

$$\sin x + \cos y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right). \qquad (\text{VII}.9)$$

$$\sin x + \cos y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right). \qquad (\text{VII}.10)$$

$$\sin x - \cos y = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right). \qquad (\text{VII}.11)$$

$$\sin x - \cos y = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right). \qquad (\text{VII}.12)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right). \qquad (\text{VII}.\ 13)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \qquad (\text{VII}.\ 14)$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right). \qquad (\text{VII}.\ 15)$$

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right). \qquad (\text{VII}.\ 16)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \cdot \sin y}. \qquad (\text{VII}.\ 17)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x \cdot \sin y}. \qquad (\text{VII}.\ 18)$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x} \qquad (\text{VII}.\ 19)$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2\operatorname{ctg} 2x. \qquad (\text{VII}.\ 20)$$

VIII. Преобразование произведений в суммы

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]. \qquad (\text{VIII}.\ 1)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]. \qquad (\text{VIII}.\ 2)$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]. \qquad (\text{VIII}.\ 3)$$

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = \frac{1}{4}\Big[-\sin(x+y+z)+\sin(-x+y+z)+$$
$$+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z)\Big]. \qquad \text{(VIII. 4)}$$

$$\sin x \cdot \sin y \cdot \cos z = \frac{1}{4}\Big[-\cos(x+y+z)+\cos(-x+y+z)+$$
$$+\cos(x-y+z)-\cos(x+y-z)\Big]. \qquad \text{(VIII. 5)}$$

$$\sin x \cdot \cos y \cdot \cos z = \frac{1}{4}\Big[\sin(x+y+z)-\sin(-x+y+z)+$$
$$+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z)\Big]. \qquad \text{(VIII. 6)}$$

$$\cos x \cdot \cos y \cdot \cos z = \frac{1}{4}\Big[\cos(x+y+z)+\cos(-x+y+z)+$$
$$+\cos(x-y+z)+\cos(x+y-z)\Big]. \qquad \text{(VIII. 7)}$$

IX. Понижение степени

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \qquad \text{(IX. 1)}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^3}(3+4\cos 2x+\cos 4x). \qquad \text{(IX. 2)}$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{2^5}(10+15\cos 2x+6\cos 4x+\cos 6x). \qquad \text{(IX. 3)}$$

$$\cos^8 x = \frac{1}{2^7}(35+56\cos 2x+28\cos 4x+8\cos 6x+$$
$$+\cos 8x). \qquad \text{(IX. 4)}$$

$$\cos^{10} x = \frac{1}{2^9}(126+210\cos 2x+120\cos 4x+45\cos 6x+$$
$$+10\cos 8x+\cos 10x). \qquad \text{(IX. 5)}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2^2}(3\cos x+\cos 3x). \qquad \text{(IX. 6)}$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{2^4}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x). \qquad (IX.\ 7)$$

$$\cos^7 x = \frac{1}{2^6}(35\cos x + 21\cos 3x + 7\cos 5x + \cos 7x). \qquad (IX.\ 8)$$

$$\cos^9 x = \frac{1}{2^8}(126\cos x + 84\cos 3x + 36\cos 5x + $$
$$+ 9\cos 7x + \cos 9x). \qquad (IX.\ 9)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x). \qquad (IX.\ 10)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{2^3}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x). \qquad (IX.\ 11)$$

$$\sin^6 x = \frac{1}{2^5}(10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x). \qquad (IX.\ 12)$$

$$\sin^8 x = \frac{1}{2^7}(35 - 56\cos 2x + 28\cos 4x - $$
$$- 8\cos 6x + \cos 8x). \qquad (IX.\ 13)$$

$$\sin^{10} x = \frac{1}{2^9}(126 - 210\cos 2x + 120\cos 4x - $$
$$45\cos 6x + 10\cos 8x - \cos 10x). \qquad (IX.\ 14)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2^2}(3\sin x - \sin 3x). \qquad (IX.\ 15)$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{2^4}(10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x). \qquad (IX.\ 16)$$

$$\sin^7 x = \frac{1}{2^6}(35\sin x - 21\sin 3x + 7\sin 5x - \sin 7x). \qquad (IX.\ 17)$$

$$\sin^9 x = \frac{1}{2^8}(126\sin x - 84\sin 3x + 36\sin 5x - $$
$$- 9\sin 7x + \sin 9x). \qquad (IX.\ 18)$$

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left[C_n^{\frac{n-1}{2}}\cos x + C_n^{\frac{n-3}{2}}\cos 3x + C_n^{\frac{n-5}{2}}\cos 5x + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_n^1\cos(n-2)x + \cos nx\right]$$
$(n$ — нечетное$)$

(IX. 19)

$$\left.\begin{aligned}\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\Big[\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} + C_n^{\frac{n-2}{2}} \cos 2x + C_n^{\frac{n-4}{2}} \cos 4x + \ldots \\ \ldots + C_n^1 \cos (n-2)\, x + \cos nx\Big]. \\ (n \text{ — четное})\end{aligned}\right\} \quad \text{(IX.20)}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\Big[C_n^{\frac{n-1}{2}} \sin x - C_n^{\frac{n-3}{2}} \sin 3x + C_n^{\frac{n-5}{2}} \sin 5x - \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \cdot C_n^1 \sin (n-2)\, x + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin nx\Big]. \\ (n \text{ — нечетное})\end{aligned}\right\}$$

(IX. 21)

$$\left.\begin{aligned}\sin^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\Big[\frac{1}{2} C_n^{\frac{n}{2}} - C_n^{\frac{n-2}{2}} \cos 2x + C_n^{\frac{n-4}{2}} \cos 4x - \ldots \\ \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} C_n^1 \cos (n-2)\, x + (-1)^{\frac{n}{2}} \cos nx\Big]. \\ (n \text{ — четное})\end{aligned}\right\}$$

(IX. 22)

X. Суммирование конечных рядов

$$\sin x + \sin (x + h) + \sin (x + 2h) + \ldots + \sin (x + nh) =$$

$$= \frac{\sin\left(x + \frac{nh}{2}\right) \cdot \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}. \qquad \text{(X. 1)}$$

$$\cos x + \cos (x + h) + \cos (x + 2h) + \ldots + \cos (x + nh) =$$

$$= \frac{\cos\left(x + \frac{nh}{2}\right) \cdot \sin \frac{(n+1)h}{2}}{\sin \frac{h}{2}}. \qquad \text{(X. 2)}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \qquad \text{(X. 3)}$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \text{(X. 4)}$$

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \qquad \text{(X. 5)}$$

XI. Обратные тригонометрические функции

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(XI. 1)}$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi. \qquad \text{(XI. 2)}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(XI. 3)}$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi. \qquad \text{(XI. 4)}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad \text{(XI. 5)}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \qquad \text{(XI. 6)}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x. \qquad \text{(XI. 7)}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad \text{(XI. 8)}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(XI. 9)}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(IX. 10)}$$

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad \text{(XI. 11)}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad \text{(XI. 12)}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1). \qquad \text{(XI. 13)}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq 0). \qquad \text{(XI. 14)}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad \text{(XI. 15)}$$

$$\cos(\arccos x) = x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad \text{(XI. 16)}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ x \neq 0). \qquad \text{(XI. 17)}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (-1 < x < 1). \qquad \text{(XI. 18)}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 19)}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 20)}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 21)}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \qquad (-\infty < x < \infty,\ x \neq 0). \qquad \text{(XI. 22)}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 23)}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 24)}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x} \qquad (-\infty < x < \infty,\ x \neq 0). \qquad \text{(XI. 25)}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad \text{(XI. 26)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),\\
&\text{если} \quad xy \leqslant 0 \ \text{или} \ x^2 + y^2 \leqslant 1.\\
&\arcsin x + \arcsin y =\\
&\qquad = \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),\\
&\qquad \text{если} \ x > 0, \ y > 0 \ \text{и} \ x^2 + y^2 > 1.\\
&\arcsin x + \arcsin y =\\
&\qquad = -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right),\\
&\qquad \text{если} \ x < 0, \ y < 0 \ \text{и} \ x^2 + y^2 > 1.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI. 27)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\arcsin x - \arcsin y =\\
&= \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right),\\
&\text{если} \ xy \geqslant 0 \ \text{или} \ x^2 + y^2 \leqslant 1.\\
&\arcsin x - \arcsin y =\\
&= \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right),\\
&\text{если} \ x > 0, \ y < 0 \ \text{и} \ x^2 + y^2 > 1.\\
&\arcsin x - \arcsin y =\\
&= -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)\\
&\text{если} \ x < 0, \ y > 0 \ \text{и} \ x^2 + y^2 > 1.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI. 28)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\arccos x + \arccos y = \arccos\left[xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right],\\
&\text{если} \ x + y \geqslant 0.\\
&\arccos x + \arccos y =\\
&= 2\pi - \arccos\left[xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right],
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI. 29)}$$

если $x + y < 0$.

$$\left.\begin{aligned}
&\arccos x - \arccos y =\\
&= -\arccos\left[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right] \quad \text{если} \ x \geqslant y.\\
&\arccos x - \arccos y =\\
&= \arccos\left[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right],
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI. 30)}$$

если $x < y$.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy < 1.\\[2mm] \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\\[2mm] \text{если } x > 0 \text{ и } xy > 1.\\[2mm] \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\\[2mm] \text{если } x < 0 \text{ и } xy > 1.\end{array}\right\} \qquad \text{(XI. 31)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{ если } xy > -1.\\[2mm] \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy},\\[2mm] \text{если } x > 0 \text{ и } xy < -1.\\[2mm] \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy},\\[2mm] \text{если } x < 0 \text{ и } xy < -1.\end{array}\right\} \qquad \text{(XI. 32)}$$

XII. Бесконечные ряды и бесконечные произведения

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad \text{(XII. 1)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad \text{(XII. 2)}$$

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots \qquad \text{(XII. 3)}$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots \qquad \text{(XII. 4)}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$$

$$(-1 < x < 1). \qquad \text{(XII. 5)}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad \text{(XII. 6)}$$

XIII. Формулы Моавра и Эйлера. Связь тригонометрических функций с гиперболическими

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx. \qquad \text{(XIII. 1)}$$

(формула Моавра)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \qquad \text{(XIII. 2)}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x. \qquad \text{(XIII. 3)}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad \text{(XIII. 4)} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad \text{(XIII. 5)}$$

Формулы (XIII. 2 — 5) называются формулами Эйлера.

$$\cos ix = \operatorname{ch} x. \quad \text{(XIII. 6)} \qquad \operatorname{ch} ix = \cos x. \quad \text{(XIII. 8)}$$

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x. \quad \text{(XIII. 7)} \qquad \operatorname{sh} ix = i \sin x. \quad \text{(XIII. 9)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ln} z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi), \\ \text{где } z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi), \ \ln \text{— табличный логарифм.} \end{array}\right\} \text{(XIII.10)}$$

XIV. Решение треугольников (плоских)

Обозначения. a, b, c — стороны треугольника ABC, противолежащие соответственно вершинам A, B, C. h_a, h_b, h_c — высоты, m_a, m_b, m_c — медианы, l_a, l_b, l_c — биссектрисы, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, p — полупериметр, S — площадь. В прямоугольном треугольнике a, b — катеты, c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad \text{(XIV. 1)}$$

(теорема синусов).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \text{ и т. д.*} \qquad \text{(XIV.2)}$$

(теорема косинусов).

---

* Слова «и т. д.» здесь и в дальнейшем обозначают, что можно сделать циклическую перестановку элементов треугольника. Таким образом, под (XIV. 2) подразумеваются три формулы:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cdot \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \end{cases}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}\ \text{(теорема тангенсов).}\qquad \text{(XIV. 3)}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.\quad \text{(XIV. 4)}\qquad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\quad \text{(XIV. 5)}$$

Формулы (XIV. 4 и 5) называются формулами Мольвейде.

$$\operatorname{ctg}A=\frac{\frac{c}{a}-\cos B}{\sin B}=\frac{\frac{b}{a}-\cos C}{\sin C}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 6)}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 7)}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 8)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{r}{p-a}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 9)}$$

$$h_a=b\cdot\sin C=c\cdot\sin B\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 10)}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\cos A}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 11)}$$

$$l_a=\frac{2bc\cdot\cos\frac{A}{2}}{b+c}\ \text{и т. д.}\qquad \text{(XIV. 12)}$$

$$r=p\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\qquad \text{(XIV. 13)}$$

$$r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}.\qquad \text{(XIV. 14)}$$

XV. Решение сферических прямоугольных треугольников

Обозначения A, B, C — вершины сферического треугольника, a, b, c — соответственно противолежащие стороны (в угловой мере) В прямоугольном треугольнике $C = 90°$, в прямостороннем треугольнике $c = 90°$. $\varepsilon = A + B + C - \pi$ («сферический избыток»).

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Если} & a < 90°, & b < 90°, & \text{то } c < 90°, \\ \text{»} & a > 90°, & b > 90°, & \text{» } c < 90°, \\ \text{»} & a < 90°, & b > 90°, & \text{» } c > 90°, \\ \text{»} & a > 90°, & b < 90°, & \text{» } c > 90°. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 1})$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Если} & A < 90°, & B < 90°, & \text{то } c < 90°, \\ \text{»} & A > 90°, & B > 90°, & \text{» } c < 90°, \\ \text{»} & A < 90°, & B > 90°, & \text{» } c > 90°, \\ \text{»} & A > 90°, & B < 90°, & \text{« } c > 90°. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 2})$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin a = \sin c \cdot \sin A, \\ \sin b = \sin c \cdot \sin B. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 3})$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} A, \\ \operatorname{tg} b = \sin a \cdot \operatorname{tg} B. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 4})$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos B, \\ \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos A. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 5})$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = \cos a \cdot \sin B, \\ \cos B = \cos b \cdot \sin A. \end{array}\right\} \quad (\text{XV. 6})$$

$$\cos a \cdot \cos b = \cos c. \quad (\text{XV. 7})$$

(сферическая теорема Пифагора)

$$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B. \quad (\text{XV. 8})$$

XVI. Решение сферических косоугольных треугольников

(Обозначения см. перед формулами XV).

$$0 < a + b + c < 2\pi. \quad (\text{XVI. 1})$$

$$\pi < A + B + C < 3\pi. \quad (\text{XVI. 2})$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \qquad \text{(XVI. 3)}$$

(теорема синусов)

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \text{ и т. д.} \qquad \text{(XVI. 4)}$$

(формулы косинуса стороны)

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos c + \sin B \cdot \sin c \cdot \cos a \text{ и т. д.} \qquad \text{(XVI. 5)}$$

(формулы косинуса угла)

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \text{ и т. д.} \qquad \text{(XVI. 6)}$$

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \text{ и т. д.} \qquad \text{(XVI. 7)}$$

$$\cos a \cdot \sin B = \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b. \qquad \text{(XVI. 8)}$$

$$\cos a \cdot \sin C = \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c. \qquad \text{(XVI. 9)}$$

Формулы (XVI. 5—8) называются формулами пяти элементов.

$$S = \varepsilon R^2. \qquad \text{(XVI. 10)}$$

XVII. Отдельные формулы, на которые имеются ссылки в этой книге

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \qquad \text{(XVII. 1)}$$

(Формула для преобразования сложных радикалов. Ее целесообразно применять лишь в тех случаях, когда $A^2 - B$ есть точный квадрат.)

$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2.$ Знак равенства имеет место только при $x = \pm 1$.

В частности, при $x > 0$:

$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$ Знак равенства имеет место только при $x = 1$. (XVII. 2)